საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია „ეკოლოგიის თანამედროვე პრობლემები“
შრომები, ISSN 1512-1976, ტ. 7, თბილისი-თელავი, საქართველო, 26-28 სექტემბერი, 2020
International Scientific Conference „Modern Problems of Ecology“
Proceedings, ISSN 1512-1976, v. 7, Tbilisi-Telavi, Georgia, 26-28 September, 2020
Международная научная конференция „Современные проблемы экологии“
Труды, ISSN 1512-1976, т. 7, Тбилиси-Телави, Грузия, 26-28 сентября, 2020

ინფორმაციული ტექნოლოგიები და სტატისტიკური მეთოდები იმიტაციურ მოდელირებაში

ბერაძე ც.

ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანოტაცია: ნაშრომში აღნიშნულია, რომ ფსევდოშემთხვევით თანაბრად განაწილებულ რიცხვებს ყოველთვის სჭირდებათ რაიმე ტესტის გავლა, რათა მიღებულ იქნას შემთხვევითი რიცხვების ნამდვილი მიმდევრობა. გამოყენებულია ძირითადად ფსევდოშემთხვევითი თანაბრად განაწილებული რიცხვების შემოწმების სხვადასხვა ტიპები.

მეთოდის დადებით თვისებას წარმოადგენს: მისი სიზუსტე და საანგარიშო ცხრილების თავიდან აცილება, რომლებიც ძირითადად გამოიყენება იმიტაციური პროგრამირების ენებში, რაც გამორიცხავს მეხსიერების დაკავებას და ზედმეტი სამუშაოს შესრულებას, ასევე ნებისმიერი განაწილების კანონის მქონე შემთხვევითი რიცხვების გენერაცია, ნებისმიერი სიზუსტის მიღება ინტერვალის რიცხვის გაზრდით, საჭიროა მხოლოდ ერთი შემთხვევითი რიცხვი და მარტივი გარდაქმნის ჩატარება. აგრეთვე ხდება ელექტრონულ გამომთვლელი მანქანის მიერ გენერირებული შემთხვევითი რიცხვების მათემატიკური მოლოდინის შეფასება.

საშუალო ინტეგრალურ და საშუალო ართმეტიკულ მათემატიკური მოლოდინის შეფასებას ვაწარმოებთ დისპერსიათა მნიშვნელობბების შედარებით, იმ დაშვებით, რომ რაც მცირეა დისპერსია, მით უფრო ზუსტია შეფასება. აქედან გამომდინარე, კორელაციური ფუნქციის სახე, გავლენას ახდენს საწყისი ინტერვალის სიგრძეზე და მათემატიკური მოლოდინის შეფასების დასაშვებ მნიშვნელობაზე.

საკვანძო სიტყვები: ინფორმაციული ტექნოლოგიები, სტატისტიკური მეთოდები, იმიტაციურ მოდელირება.

სისტემის ელემენტების ფუნქციონირება, რომლებიც მათემატიკურ მოდელში წარმოადგენენ რეგრესიულ ნაწილს, მოცემულია შემთხვევითი რიცხვების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა შემთხვევითი რიცხვების და ფსევდოშემთხვევითი რიცხვების გენერაცია.

მოცემულია შემთხვევითი რიცხვების გენერაციის პირობები და მისგან ნებისმიერად განაწილებული კანონის მქონე შემთხვევითი რიცხვების მიღების მიმდევრობა. პარამეტრებად ამ შემთხვევაში შეიძლება ამორჩეულ იქნას [0,1] შუალედში თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები. გენერირებული შემთხვევითი რიცხვების მათემატიკური მოლოდინის შეფასება ხდება ელექტრონულ გამომთვლელი მანქანის მიერ.

გამოყენებულია სამი სახის შეფასება:

- საშუალოინტეგრალურთან შესაბამისი $m_x^n = \frac{1}{T}\int f(t)dt;$

- არასაშუალოწონიანი $m_x^b = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$;
- საშუალო არითმეტიკული $m_x^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$;

ცნობილია რომ ბოლო ორი პრაქტიკულად არ განსხვაბდება პირველიდან, როცა n რაოდენობა დიდია. რადგან სტატისტიკური ინფორმაციის შეგროვება ხდება დისკრეტული დროის ინტერვალებში, ამიტომ მათემატიკური მოლოდინის საშუალო არითმეტიკული შეფასება ძირითადია მათემატიკური ლოდინის შეფასების მეთოდებთან. დაუშვათ, რომ დროის დისკრეტული პროცესი მოცემულია დისკრეტულად Δ ინტერვალების გამოყენებით.

$f_a(t) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$,

სადაც $x_i - i$ - დროის მომენტში პროცესის მნიშვნელობაა.

გამოვიკვლიოთ m_x^n - სიზუსტის შეფასება. მოდელირების დროს აღვნიშნოთ T-თი დაუშვათ, რომ ავტოკორელაციურ ფუნქციას აქვს ექსპონენციალური სახე: $k(t) = \sigma^2 \ell^{-c|r|}$ მაშინ,

$$\sigma^2_{m^n_{sx}} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n}\sigma^2 \sum_{n=1}^{n-1} \ell^{-ct_i} - \frac{2}{n^2}\sigma^2 \sum_{n=1}^{n-1} i\ell^{-ct_i}.$$

როცა მონაცემთა აღება ხდება თანაბარგანაწილებულ ინტერვალში , Δ მაშინ $x_i = \Delta i$

გარდაქმნების შემდგომ მივიღებთ:

$$\sigma^2_{m^n_{sx}} = \sigma^2 \frac{n(1-\ell^{-2c\Delta}) - 2\ell^{-2c\Delta}(1-\ell^{-2c\Delta n})}{n^2(1-\ell^{-2c\Delta})^2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\frac{\sigma^2}{\sigma_{m^n_{sx}}} = \omega^a$; $c\Delta = \theta_0$; $c\Delta n = \theta$, გავითვალისწინოთ, რომ $\Delta n = T$,

მივიღებთ $\theta = \theta_0 n$, მაშინ $\omega^a = \frac{n^2(1-\ell^{-\theta_0})^2}{n(1-\ell^{-2\theta_0}) - 2\ell^{-\theta_0}(1-\ell^{-\theta})}$;

სადაც, $\theta_0 - k = 1/c$ დროის ინტერვალის სიგრძის სიდიდეა Δ დროის ინტერვალში, θ - არის თანაბარგანაწილებული შემთხვევითი რიცხვების ინტერვალის სიგრძის (K) ერთეულებში გამოსახული მოდელირების ინტერვალის სიგრძე. W^a - სიდიდეს მოგებას უწოდებენ. თუ გამოვითვლით W^a-ს კიდურა მნიშვნელობებს θ დიდი და მცირე მნიშვნელობებისათვის, მივიღებთ, რომ $W^a = \min\left\{\frac{\theta}{2}, n\right\}$. ეს მნიშვნელობა შეესაბამება სინამდვილეს თუ θ >3 ან θ <0.5 . რადგან $\theta = n\theta_0$, როცა θ_0 =3 და θ_0 =0.5 მივიღებთ, რომ n=6 ცდომილების შეფასება ამ შემთხვევაში შეადგენს 5%-ზე ნაკლებს. როცა n>10 და დასაშვები ცდომილება 10%-ია, მაშინ მივიღებთ, რომ θ_0 <1. თუ დაუშვებთ, რომ მათემატიკური მოლოდინის ცდომილების შეფასება არ უნდა შეადგენდეს არაუმეტეს 5%, მაშინ სტატისტიკური ინფორმაციის შეფასება უნდა მოხდეს იმ დროს, როცა θ_0 = 0.5, რაც იწვევს მანქანური დროის ხარჯვას, ამიტომ შეფასების კრიტერიუმი უნდა შეირჩეს აუცილებლად კერძო მოთხოვნილებიდან გამომდინარე. კორელირების უგულებელყოფა იძლევა დიდ ცდომილებას, რის გამოც შეიძლება გამოჩნდეს მათემატიკური მოლოდინის მოგება გაიზარდოს 2/θ_0 - ჯერ, მის ნამდვილ მნიშვნელობასთან შედარებით.

W^a-შეფასებისათვის ტიპიური მახასიათებლების შესაფასებლად გამოვიყენებთ ოთხ ძირითად სტატისტიკურ ოპერაციას:

1. დაკვირვების რაოდენობის გაზრდა, როცა θ_0 =const . თუ n>3, მაშინ W^a-ფასდება $W^a = \frac{\sigma^2}{n}$ ფორმულით. დაუშვათ, რომ θ_0 >3, მაშინ $W^a = n$. თუ დაკვირვებათა რიცხვი გაიზარდა K რაოდენობით, მაშინ $n_i = kn$. ცხადია $W^a = kn$ და მოგება მიიღებს W_i^a/

$W^a = k$ სახეს. თუ $\theta_0 < 0.5$, მაშინ $W^a = \theta/2$, $W_i^a = k\frac{\theta}{2}$ და $\frac{W_i^a}{W^a} = k$; ; აქედან გამომდინარე ნებისმიერ შემთხვევაში მათემატიკური მოლოდინს შეფასება იზრდება k-თი θ_0 -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის დაკვირვებათა რიცხვის k-თი გაზრდის დროს.

2. დაკვირვებათა რაოდენობის გაზრდა, როცა θ =const . ამ შემთხვევაში დაკვირვებათა რიცხვის გაზრდა სასურველია მოხდეს ისეთ სიდიდემდე, როცა $\frac{\theta}{n} > 5$ თუ $\frac{\theta}{n_i} = \frac{\theta}{(kn)}$ >3, მაშინ სიზუსტე იზრდება k-ჯერ; წინააღმდეგ შემთხვევაში მცირდება, ხოლო $\frac{\theta}{n_i}$<0.5 დროს სიზუსტის გაზრდა საერთოდ არ ხდება.

3. განმეორებითი დამოუკიდებელი დაკვირვებების წარმოება.

თუ მოდელირების პროცესის დროს გამომავალი P პარამეტრი იღებს მიმდევრობით მნიშვნელობებს, მაშინ ამორჩევა S=$S_1, S_2, \ldots, S_n$ შეიძლება ჩაითვალოს n-ის განზომილების ვექტორად. თუ მოდელირებას გავიმეორებთ თავიდან, მაგრამ სხვა შემავალი შემთხვევითი მნიშვნელობებისათვის, მივიღებთ ახალ ვექტორს S_1, P პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის, რომელიც განაწილების კანონით ემთხვევა წინა განაწილებას, ხოლო თუ მოდელირებას გავიმეორებთ k-ჯერ, მაშინ P პარამეტრები მიიღებენ k ვექტორების მიმდევრობის სახეს- $S_1', S_2', \ldots, S_k'$, რომლებსაც ერთნაირი განზომილება და განაწილება ექნებათ. თუ შემავალი შემთხვევითი მიმდევრობები დამოუკიდებელია, მაშინ დამოუკიდებელია $S_1', S_2', \ldots, S_k'$ ვექტორებიც. ამავე დროს ეს ვექტორები სტაციონალური და ერთნაირად განაწილებულია. როგორც წესი, მოდელირების დროს სტაციონალურ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ყველა ეს პირობა სრულდება.

განვიხილოთ ამ შემთხვევაში მათემატიკური მოლოდინის შეფასების რაოდენობრივი მნიშვნელობის ცვლილება. $S_1', S_2', \ldots, S_k'$ ვექტორების მიმდავრობა ითვალისწინებს ამორჩევის დამოუკიდებლობას S_i, i=1,n -დან; შეფასების დისპერსია ყველა ამორჩევების გათვალისწინებით შეადგენს $\sigma_k^2 = \sigma_1^2/k$, სადაც σ_1^2 ერთი ამორჩევით მიღებული დისპერსიის მნიშვნელობაა. შევადაროთ მოდელირების გამეორების შედეგად მიღებული შედეგები გამეორების გარეშე მიღებულ შედეგებს, რომლებსაც ერთი და იგივე სიგრძე აქვთ. $T_\sigma = kT_n$ სადაც T_n იმ დროის ინტერვალის სიგრძეა, რომელიც საჭიროა S_1 ვექტორის მისაღებად. დაუშვათ განმეორებადი ამორჩევისათვის $\theta_n > 3$, მაშინ, $W_n = \frac{\theta_n}{2}$; $W_k = W_n k$, სადაც $\theta_n k$ -ური განმეორების მათემატიკური მოლოდინის მოგებაა. განმეორების გარეშე ამორჩევისათვის $\theta_\delta = k\theta_n$. ამ დროს $W_\delta = \frac{\theta_\delta}{2} = \frac{k\theta_n}{2} = W_n k$, აქედან გამომდინარე, როცა θ_n>3, განმეორებითი ამორჩევის k-ჯერ განმეორებას არავითარი აზრი არა აქვს. ამასთან განმეორებითი ამორჩევის ჩატარება არაა სასურველი. რადგან უფრო რთულდება მათემატიკური მოდელი და თვითონ პროგრამული პროდუქტი. რთულდება აგრეთვე საწყისი ლოგიკური პირობები და ცვლადები. დაუშვათ, რომ θ_n<0.5, მაშინ $W_n \cong 1$ და $W_k = W_n\, k \cong k$ თუ $\theta_\delta = k\ \theta_0$>3, მაშინ $W_\delta = \frac{\theta_n k}{2}$ განმეორებადი ამორჩევის მათემატიკური მოლოდინის შედარებითი მოგება შეადგენს $\frac{W_k}{W_\delta} = 2/Q_n$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ W_n =1 მივიღებთ, რომ ერთი წერტილიდან გაზომვების ჩატარება საკმარისია იმიტაციური მოდელირებისას და მისი განმეორება არავითარ შედეგს არ

გვაძლევს. ეს მომენტი საშუალებას გვაძლევს მინიმუმამდე შევამციროთ Q აქედან გამომდინარე, შედარებითი მოგება განმეორებითი ამორჩევისას არაა დამოკიდებული განმეორებათა რიცხვზე, იმ პირობით, რომ k>3/ Q_n და დამოკიდებულია მხოლოდ დაკვირვების ინტერვალის სიგრძით განმეორებითი დაკვირვებისას. რაც უფრო მცირეა ეს ინტერვალი მით უფრო მეტი მოგების მიღება შეიძლება.

იმიტაციური მოდელირების დროს, როცა სისტემის შესავალზე მოთხოვნათა ინტენსივობა დამოკიდებულია რიგის სიგრძეზე.

ავტოკორელაციურ ფუნქციას აქვს საწყის ეტაპზე კოორდინატთა შემცირების ტენდენცია, ე.ი. $\mathrm{k}(\tau)'_{\tau=0} = 0$ და ცხადია, უფრო ნელა მიილევა. ამ თვისებას იმეორებს ლაგერის ფუნქცია.

მოვახდინოთ ლაგერის პირველი ხარისხის ავტოკორელაციური ფუნქციის აპროქსომაცია $R_X(\tau)$=$\sigma^2(c\tau + 1)\ell^{-c/\tau}$. როგორც ვიცით $f_x(t)$-ს აქვს საშუალოინტეგრალური აღწერა, რადგან არ გააჩნია მნიშვნელობა არადისკრეტული დროის ინტერვალში. აქედან გამომდინარე $f_x(t)$ იქნება $f(t)$ პროცესის შეზღუდული ფუნქცია რაიმე n ელემენტიან სიმრავლეზე. $f(t)$ პროცესი არის დისკრეტული, მაგრამ, რადგან აღწერილია უწყვეტ დროში და შეიძლება გაზომილ იქნას ნებისმიერი დროის მომენტში, აქვს საშუალოინტეგრალური შეფასება. ცხადია რომ საშუალოინტეგრალური შეფასება უფრო სუსტია, ვიდრე საშუალო არითმეტიკული შეფასება. ასევა n ამორჩევის მოცულობის გაზრდით იზრდება $f(t)$ ასახვის სიზუსტე $f_x(t)$ -ზე, მაგრამ n-ის გაზრდა ზრდის მოდელირების დროს, იწვევს სამანქანო დროის გაზრდას. ამიტომ ამორჩევის მოცულიბის დადგენა პრინციპიალური და ამავე დროს კომპრომისული საკითხია მანქანური დროის ფასისა და მოდელის საჭირო სიზუსტის გათვალისწინებით.

4. საშუალოინტეგრალურ და საშუალოართმეტიკულ მათემატიკური მოლოდინის შეფასებას ვაწარმოებთ დისპერსიათა მნიშვნელობების შედარებით, იმ დაშვებით, რომ რაც მცირეა დისპერსია, მით უფრო ზუსტია შეფასება. ცნობილია, რომ $f(t)$ - პროცესის საშუალოინტეგრალური შეფასების საშუალოკვადრატული გადახრაა.

$$\sigma_m^{i^2} = \frac{2}{T}\int_0^1 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) k_x(\tau)d\tau;$$

საშუალოკვადრატული გადახრა საშუალოართმეტიკული მოლოდინის შეფასებისა $f_x(t)$ პროცესისათვის იქნება $\sigma_m^{i^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left[1 - \frac{i}{n}\right]K_X(t_i),$ ცნობილია, რომ მათემატიკური მოლოდინის საშუალოინტეგრალური შეფასების დროს უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობა: $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} f_{xi}(t_i - t_{i-1}),$

სადაც $f(t)$ - სტაციონალური შემთხვევითი პროცესია, უწყვეტი დროში;

$f_x(t)$ - დროებითი დისკრეტული პროცესია; n - $f(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა რაოდენობაა [0,T] დროის შუალედში. გარდაქმნების შემდგომ მივიღებთ:

$$W^A = \theta/\theta_0\,; W^A = \min(\theta/2\,, \theta/\theta_0)\,, \theta_0 < 0.5\ \&\ \theta_0 > 3\,; W^A = \theta/\theta_0\ ; \theta_0 > 5\,;$$

აქედან გამომდინარე, კორელაციური ფუნქციის სახე გავლენას ახდენს საწყისი ინტერვალის სიგრძეზე და მათემატიკური მოლოდინის შეფასების დასაშვებ მნიშვნელობაზე. მაგალითად, როცა ბიჯი θ_0=5 სხვადასხვა სიგრძის ინტერვალისათვის მათემატიკური

მოლოდინის შეფასების ერთი და იგივე სიზუსტე მიიღება. განიხილება სამი სხვადასხვა ვარიანტი: 1. θ=5 - ამორჩევის ელემენტის არაკორელაციურობა, 2. θ=20 - კორელაციური ექსპონენციალური ფუნქცია, 3. θ=37- კორელაციური ფუნქცია- პირველი ხარისხის ლაგერის ფუნქცია.

ბიჯის შემცირება 1-დან 0.1-მდე გვაძლევს ინტერვალის 14%-იან შემცირებას პირველ ვარიანტში, ხოლო მესამე ვარიანტში ინტერვალი 10-ჯერ მცირდება. θ-ს შემცირებით 5-დან 0.5-მდე მოდელირების ინტერვალი მესამე ვარიანტში მცირდება 1.35-ჯერ, მეორეში- 2.2-ჯერ, ხოლო პირველ ვარიანტში-10-ჯერ. საწყისი ინტერვალის უგულებელყოფას მივყავართ მათემატიკური მოლოდინის შეფასების სიზუსტის შესამჩნევ გაზრდასთან რეალურთან შედარებით.

ლიტერატურა

1. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента. //Москва, Наука, 1987.
2. Шенон Р. Имитационное моделирование систем. // Искусство и наука. Москва, Мир, 1978.
3. Кандшкин С. К., Контанистов С. П., Семенов В. М. Принципы построения математических. А. моделей динамики движения, В. автомовильная промышленность, 1979, №7
4. ოდიშარია კ., ხოშტარია ს., ებანოიძე ჟ. სისტემების და პროცესების მოდელირება. // თბილისი, 2011.

INFORMATION TECHNOLOGIES AND STATISTICAL METHODS IN THE SIMULATION MODELING

Beradze Ts.

Summary: The pseudo-randomly distributed numbers always require to pass any test, in order to obtain a valid sequence of random numbers. There have been used mainly the different types of checking the pseudo-randomly equally distributed numbers.

The positive aspect is: the accuracy of method and avoidance of the design tables, which are mainly used in the imitation programming languages, which excludes memory loading and executing extra work, as well as generation of random numbers with any distribution law, obtaining any accuracy by increasing the number of interval, there is only a need for one random number and a simple transformation.

There have been applied three types of assessment – appropriate with an average integral one, not average weighted magnitude and the arithmetic mean. Since statistical information is gathered within the discrete time intervals, the mean arithmetic assessment of mathematical expectation is the basic one with mathematical expectation assessment methods.

The auto-correlation function, at the initial stage, is in a declining trend of coordinates, and obviously, it is decreasing slowly, and the Lagu erre function has the same property, so we make approximation of the Lagu erre first-order auto-correlation function.

We assess the average integral and mean arithmetic mathematical expectation by comparing the dispersion values, with the assumption that the smaller the dispersion the more accurate assessment. Therefore, the type of the correlation function influences the length of an initial interval and the permissible value of mathematical expectation.

Key words: Information technology, statistical methods, imitation modeling.