Кинематическая модель неравномерного вращения жидкой среды

[1]Чхитунидзе М.С., [2]Жонжоладзе Н.И., [1]Хведелидзе И.Б.

[1]Тбилиский Государственний Университет им. Ив. Джавахишвили, Институт Геофизики
[2]Телавский Государственний Университет им. И. Гогебашвили
marina_chxitunidze@yahoo.com

Введение: При вращениижидкости скорость частиц жидкости может меняться произвольным образом. Это означает, что равномерное вращение является лишь частным случаем, т.е. такое движение может происходить лишь в определенных, редких случаях, реализация которых обычно имеет место в технических установках или приборах. В природе стабильные вращательные движения встречаются в различных проявлениях, например: в околоземной атмосфере, морской среде, а также на некоторых участках рек, там, где имеются условия для стационарного существования водяных вихрей. Математической основой для исследования вращательных движений в вязкой жидкой среде является уравнение Навье-Стокса, которое, в случае идеальной среды, меняет уравнение Эйлера. В природе вращательное движение бывает стабильным лишь в пределах характерного временного масштаба. Например, глобальный атмосферный циклон (антициклон) может существовать втечение от нескольких часов до нескольких дней, в то время, как обычный речной омут (вихрь) является практически постоянным. В общем, можно сказать, что практически любое вращательное движение может подвергаться возмущениям, вследствие которых оно способно потерять стабильность. Так происходит с атмосферными вихрями, а также с морскими вихрями, вызванными штормами достаточно высокой интенсивности. Формально, развитие возмущений в области движущейся жидкости можно рассматривать, как нарушение равномерного движения, следствием которого во многих случаях является зарождение и развитие неоднородного вращения. Полноценное моделирование такого процесса, связанного с решением уравнения движения, может оказаться либо очень сложным, либо практически невозможным из-за конкретных математических проблем. В таком случае, задача состоит в приблизительной аппроксимации поля скоростей вращения, которая должна быть достаточно адекватной с реальном движением. В некоторых случаях такая цель достигается при помощи какой-либо кинематической модели скоростей. По строгому требованию, она должна удовлетворять определенным критериям, т.н. динамическим условиям движения [1,2].Однако, модели, в полной мере удовлетворющие этим условиям,достаточно сложно построить. Для наглядности сутиэтой проблемы ниже будет рассмотрена одна из кинематических моделей, которая, несмотря на определенные недостатки, в некоторых случаях может оказаться полезной из-за ее физической простоты. Эта модель первоначально была применена для моделирования асимметричного температурного поля в высокоширотной ионосфере[3]. Известно, что в области пространства полярного каспа самосогласованное действие динамических и термических факторов определяет крупномасштабное ветровое движение на уровне верхней атмосферы. Эта кинематическая модель используется также и в работе [4], представленной в данном сборнике. В ней исследуется возможный гидродинамический механизм, способствующий образованию подземной горизонтальной лавовой трубки.

1.Асимметричное вращение среды в полярной ионосфере. Для наглядности требований, предъявляемым к кинематичеким моделям скоростей, достаточно удобным представляется краткое обсуждение основы работы [3]. В ней используется физическая аналогия между формой полярного каспа и обычной воронкой.Движение жидкости сквозь такое тело подчиняется обычным уравнениям гидродинамики, представленным в цилиндрических координатах [5]. Подобная система координат использовалась также в [3], центр основания которой совпадал с магнитным полюсом Земли. Ось z этой системы была направлена вертикально вверх, азимутальный угол φ отсчитывался от условной точки на внешней границе поверхности аппроксимирующего полярный касп, цилиндра. Было допущено, чтодвижение несжимаемой ионосферной среды является плоским, т.е. по предположению оно происходит в горизонтальной плоскости. В таком случае вертикальный перенос в ионосфере отсутствует, ввиду чего могут существовать лишь радиальная и азимутальная компоненты скорости

$$V_z = 0\,;\; V_r = V_r(r,\varphi);V_\varphi = V_\varphi(r,\varphi) \qquad (1)$$

В случае плоского вращательногодвижения сила Корриолиса, вызванная вращением Земли вокруг собственной оси, имеет только две компоненты

$$F_z = -\rho 2\omega_0 V_\varphi\,;\; F_\varphi = \rho 2\omega_0 V_r \qquad (2)$$

где $2\omega_{0z} = 2\omega_0 \sin\chi \approx 2\omega_0$, ($\chi$ -коширота), ω_0-угловая скорость вращения Земли, ρ - плотность ионосферы.

В случае несжимаемой среды из уравнения Эйлера в линейном приближении следует, что для обеспечения вращательного движения горизонтального нейтрального ионосферного ветра должны выполняться следующие соотношения[2]

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega_0\rho_0 V_\varphi\,;\; -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 2\omega_0\rho_0 V_r\,, \qquad (3)$$

где P- давление.

Очевидно, что поле скоростей в несжимаемой среде должно подчиняться уравнению неразрывности: $div\vec{V} = 0$

$$div\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\omega_0\rho}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial P}{\partial r}\right\} = 0\,, \qquad (4)$$

а также условию существования гидродинамического вихря

$$rot_z\vec{V} = \frac{1}{2\omega_0\rho_0}\Delta P\,, \qquad (5)$$

где Δ-цилиндрический оператор Лапласа, $rot_z\vec{V}$ -вертикальная компонентавихря. В выражениях (4) и (5) заключается фундаментальный результат. Согласно [1] именно они определяют необходимые требования к полю скоростей, топология которого может задаваться кинематической моделью. Действительно, выражения (4) и (5) показывают, что при пренебрежении вертикальным движением поле скоростей всегда является соленоидальным $\left(div\vec{V} = 0\right)$ и вихревым $\left(rot_z\vec{V} \neq 0\right)$. Эти требования, накладывающие достаточно жесткое ограничение на поле скоростей, во многом сужают класс кинематических моделей. Следовательно, полностью адекватными могут быть лишь отдельные модели, обычно позволяющие корректно определять поле скоростей, только лишь в наиболее простых случаях.Однако, такие модели достаточно широко эксплуатировались для решения некоторых задач гидродинамики, динамической метеорологии и динамики околоземного космического пространства [6]. Тем не менее, можно допустить,что некоторые кинематические модели, лишь в отдельных задачах удовлетворяющие критериям динамической возможности движения, иногда могут быть вполне пригодными с точки зрения представления вероятного пути эволюции динамической картины вращения жидкости.Именно такой можно считать кинематичекую модель, ипользованную в работе[3]

$$V_r = \frac{1}{2}u_0\left(\frac{r}{R_0}\right)(cos\varphi + sin\varphi), \qquad (6)$$
$$V_\varphi = u_0\left(\frac{r}{R_0}\right)(cos\varphi - sin\varphi),$$

где радиус поперечного сечения цилиндра R_0 является линейным масштабом задачи, u_0 – характерная скорость нейтрального полярного ветра.

Легко проверить, что модель скоростей (6) вполне удовлетворяет выражениям (4) и (5). Поэтому, эти выражения для компонет скоростей определют динамическую картину вращения ионосферной среды только в поперечном разрезе полярного каспа, т.е. в плоскости полярного овала, в частности, при помощи модели (6) динамическое давление P можно получить из формулы (5) в квадратурах, что полностью однозначно определяется картина движения через динамические параметры полярной среды: $P, \nabla P, V_r, V_\varphi$. Это является вполне достаточным для моделирования циркуляционного (вихревого) движения. Существование такого движения в полярной области подтверждено экспериментальными данными [7]. Однако, для более сложного, по сравнению с уравнениями (3), стационарного вращательного движения кинематическая модель (6) может оказаться недостаточно корректной, что видно на примере гидродинамической модели лавовой трубки.

2.Гидродинамическая модель горизонтальной лавовой трубки. Несмотря на очевидное различие между задачами конвективного переноса ионосферной среды игидродинамического течения лавы, обе онипредставляются достаточно полезными с точки зренияподтверждения физической эффективности кинематической модели скоростей (6). Согласно [4], результаты вращательного движения магматической среды являются вполне очевидными по характерным следам, оставленным на внутренних поверхностях лавовых трубок. Несмотря на то, что конвективное движение ионосферных масс имеет малое подобие с гидродинамическим течением в цилиндрической трубе, тем не менее может существовать обстоятельство, способствующее топологическому подобию этих процессов. В частности, очевидно, что некоторое сходство задачи [3] с задачей [4] состоит в существовании определенных вынуждающих механизмов, закручивающих ионосферную газообразную, либо магматическую лавовую среду. В первой задаче вращение обеспечивается неоднородным температурным полем, во втором- конусообразной формой лавовой трубки, подобной гидродинамической воронке. В процессе движения лавы вращение может еще более усилиться появлением на внутренней поверхности лавового руславолнообразной шероховатости. Одновременное действие этихфакторов, каждый из которых вызывает завихрение лавы будет происходить в гравитационном поле, которое должно оказывать влияние на перераспределение масс в конусообразном подземном русле. Однако, в отличие от ионосферного газа, вязкость лавы является существенным фактором, действие которого должно приводить к образованию пограничного слоя. Это означает, что для выполнения условия прилипания лавы к внутренней поверхности лавового русла необходимо определенным образом изменить кинематическую модель (6)

$$V_\varphi = \bar{U}\frac{R_0 - r}{R_0}(\cos\varphi - \sin\varphi), (8)$$
$$V_r = \frac{\bar{U}}{2}\frac{R_0 - r}{R_0}(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

где $0 \le r \le R_0$, угловая координата φ может меняться с периодом 2πn, где n - целоечисло. $\bar{U}$– характерная средняя скорость течения лавы.

Обсуждение. Очевидно, что ограничения, накладываемые условиями динамической возможности, суживают класс тех течений, которые могут быть моделированы в кинематическом приближении. Однако, вместе с этим, эти ограничения повышают ценность тех кинематических моделей, которые в достаточной степени адекватны некоторым типам движений, реализация которых возможна в конкретных условиях.Как было отмечено, кинематическая модель (6) частично теряет свои качества в рамках другой задачи, хотя представляется, что в этом случае она остается достаточно полезной с точки зрения объяснения физических следствий неравномерного вращения [4]. В часности, модель (8) является ограниченной, т.к. предполагает отсутствие поступательного движения. Однако, если отказаться от такого представления, можно считать, что (8) соответствует вращательному движению только на некотором участке подземного лавового русла, на котором вязкие силы настолько возрастают, что полностью тормозят поступательное движение лавы. Кроме этого, поле скоростей по кинематической модели (6) вполне пригодно для сравнительного анализа с другими модельными полями. Например, можно указать на вихревую картину вынужденного конвективного движения, возникающего в горизонтальном бесконечном жидком цилиндре квадратного сечения. По условиям этой задачи вращательное движение, происходит из-за распространения теплового возмущения в покоящейся несжимаемой жидкости. Это возмущение обеспечивает температурный градиент, действующий в плоскости поперечного сечения жидкого цилиндра. Для моделирования этого процесса была использована довольно сложная кинематическая модель скоростей [8]

$$\begin{aligned} v_y &= f_2(x,y)kcoskz, \\ v_x &= f_1(x,y)kcoskz, \\ v_z &= f_3(x,y)sinkz, \end{aligned} \tag{7}$$

где $f_i = (1 - r^2)\sum_{m,n}^{i} C_{m,n}^{i}\, x^m y^n$, где K -волновое число по оси цилиндра, вдоль которого распространяются периодические пространственные возмущения, x,y-поперечные координаты.

Согласно [8], при помощи модели (7) из уравнения неразрывности устанавливаются связи между полиномами $C_{m,n}^{i}$ и строится система нескольких независимых базисных функций, определяющих возможные типы конвективных движений в плоскости поперечного сечения цилиндра. В этой модели является важным то, что базисные движения допускают возникновение не только единичного вихря, но также и вихревых пар.

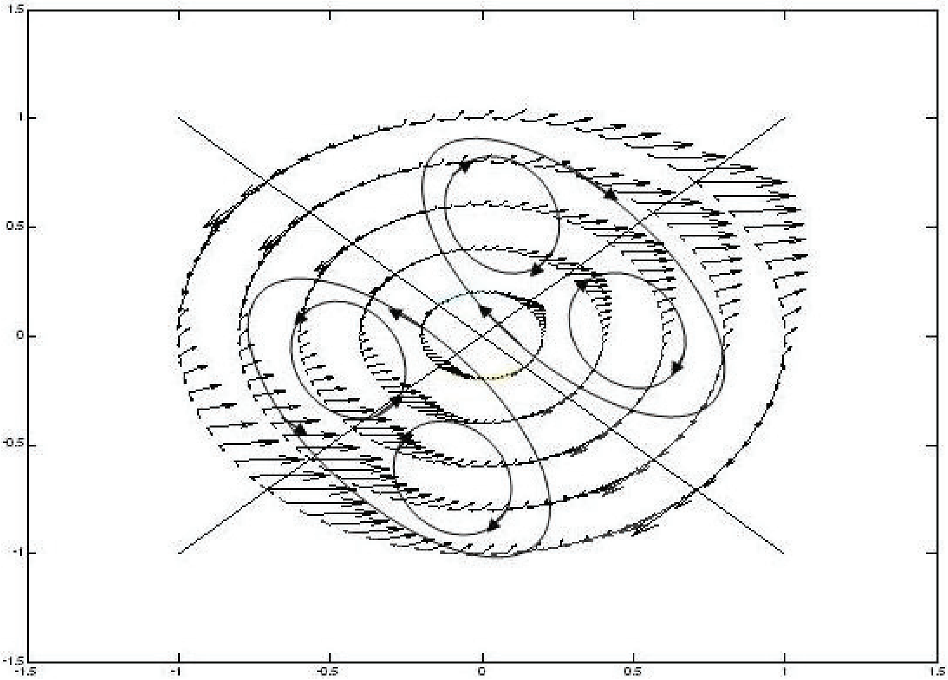

Рис.1

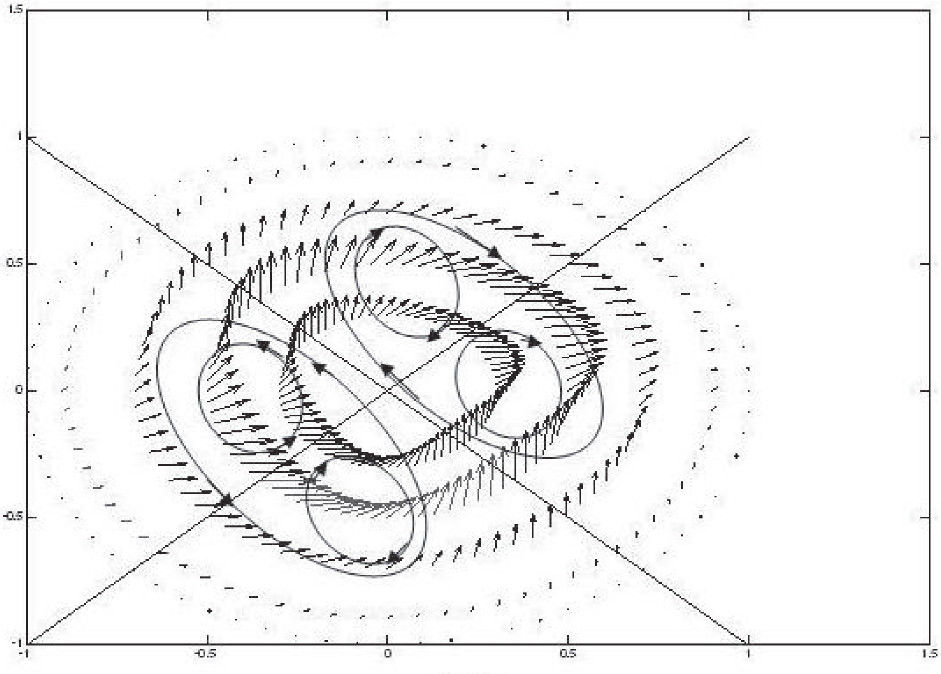

Рис.2

Визуальное представление. Для наглядности кинематических моделей (6) и (8) служат рис.1 и рис.2, на которых изображены картины вращения, нормированные на характерную скорость движения. Очевидно, что эти графические представления, имеющие симметричную секториальную структуру, являются в некоторой мере искусственными. Тем не менее, они являются достаточно полезнымы, если представить развитие этих рисунков во времени. В частности, физически очевидно, что эволюция полей должна происходить в направлении попарного возникновения вихрей, линейные размеры которых должны последовательно уменьшаться. Физически, вихревая цепочка может рассматриваться, как результат развития гидродинамической неустойчивости, приводящей к размыванию границ последовательно возникающих секторов, имеющих все более мелкие линейные масштабы, как это происходит при турбулентном движении.

Литература

1. Н.Е.Кочин, И.А. Кибель, П.В. Розе. Теоретическая гидродинамика, 2. Гостехиздат. 1948, 608 с.
2. А.Г.Хантадзе.Некоторые вопросы динамики проводящей атмосферы. Тбилиси, Мецниереба. 1973. 278 с.
3. V.Kirtskhalia, Z.Kereselidze, N.Dzhondzholadze and M.Chkitunidze. An Analytical Model of an Asymmetrical Temperature Field in the Polar and AuroralIonosphere.Georgian International Journal of Science and Technology. V.3. №4. pp.381-90. 2012.
4. З.Кереселидзе, Д.Одилавадзе. Гидродинамическая модель конусообразной лавовой трубки. Труды Института геофизики (T.LXVIIв данном зборнике статьей)2016.
5. X. Binnie A.M. Harris. D.P. The application of Bonndary-Layer Theory to Swirling Liquid Flow Through a Nozzle. Quart. Joun. Mech and Applied, Math1. V.3. p1. 1950.pp. 89-106.
6. А.Г.Хантадзе, Г.Д.Абурджания. О проблеме сверхвращения верхней атмосферы в полярной области. Известия РАН, Физика атмосферы и океана. Т.40.№3.2004.с.418-32.
7. С.И. Акасофу, С.Чепмен. Солнечно-земная физика,ч.1. Москва. Мир. 1974. 509 с.
8. З.Гершуни,Е.М.Жуховицкий.Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.Москва,Наука.1972. 392 с.

თხევადი გარემოს არათანაბარი ბრუნვის კინემატიკური მოდელი

ჩხიტუნიძე მ., ჟონჟოლაძე ნ., ხვედელიძე ი.

რეზიუმე

მოძრავი სითხის არეში შეშფოთების განვითარება ფორმლურად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც თანაბარი მოძრაობის დარღვევა, რომლის შედეგს უმრავლეს შემთხვევაში წარმოადგენს არათანაბარი მოძრაობის გაჩენა და განვითარება. ასეთი პროცესის სრულფასოვანი მოდელირება, რომელიც დაკავშირებულია მოძრაობის განტოლების ამონახსნთან, შეიძლება აღმოჩნდეს ან ძალიან რთული ან სრულიად შეუძლებელი კონკრეტული მათემატიკური პრობლემების გამო. ამ შემთხვევაში ამოცანა მდგომარეობს ბრუნვის სიჩქარეთა ველის მიახლოებით აპროკსიმაციაში, რომელიც უნდა იყოს საკმარისად ადექვატური რეალური მოძარაობის. ზოგიერთ შემთხვევაში ასეთი მიზანი მიღწევადია რომელიმე სიჩქარეთა კინემატიკური მოდელის დახმარებით. მკაცრი მოთხოვნების მიხედვით ის უნდა აკმაყოფილებდეს განსაზღვრულ კრიტერიუმებს, ე.წ. მოძრაობის დინამიურობის პირობებს. სწორედ ასეთად შეიძლება ჩავთვალოთ კინემატიკური მოდელი

$$V_r = \frac{1}{2}u_0\left(\frac{r}{R_0}\right)(cos\varphi + sin\varphi),$$

$$V_\varphi = u_0\left(\frac{r}{R_0}\right)(cos\varphi - sin\varphi),$$

სადაც რადიუსი წარმოადგენს ამოცანის წრფივ მასშტაბს. u_0-ნეიტრალური პოლარული ქარის მახასიათებელი სიჩქარეა.

ცხადია, რომ შეზღუდვები, რომლებიც დინამიურობის შესაძლებლობის გამოედება, ავიწროებს იმ დინებების კლასს, რომლებიც შეიძლება მოდელირებული იყვნენ კინემატიკურ მიახლოებაში. თუმცა, ამავე დროს, ეს შეზღუდვები ზრდის იმ კინემატიკური მოდელების ღირებულებას, რომლებიც საკმარისად ადექვატურები არიან ზოგიერთი ტიპის მოძრაობის, რომელთა რეალიზაცია შესაძლებელია ზოგიერთ შემთხვევაში.

Кинематическая модель неравномерного вращения жидкой среды

Чхитунидзе М.С., Жонжоладзе Н.И., Хведелидзе И.Б.

Реферат

Формально, развитие возмущений в области движущейся жидкости можно рассматривать, как нарушение равномерного движения, следствием которого во многих случаях является зарождение и развитие неоднородного вращения. Полноценное моделирование такого процесса, связанного с решением уравнения движения, может оказаться либо очень сложным, либо практически невозможным из-за конкретных математических проблем. В таком случае задача состоит в приблизительной аппроксимации поля скоростей вращения, которая должна быть достаточно адекватной с реальным движением. В некоторых случаях такая цель достигается при помощи какой-либо кинематической модели скоростей. По строгому требованию, она должна удовлетворять определенным критериям, т.н. динамическим условиям движения.

Именно такой можно считать кинематичекую модель

$$V_r = \frac{1}{2} u_0 \left(\frac{r}{R_0} \right) (\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$V_\varphi = u_0 \left(\frac{r}{R_0} \right) (\cos\varphi - \sin\varphi),$$

где радиус является линейным масштабом задачи, u_0 -характерная скорость нейтрального полярного ветра.

Очевидно, что ограничения, накладываемые условиями динамической возможности, суживают класс тех течений, которые могут быть моделированы в кинематическом приближении. Однако, вместе с этим, эти ограничения повышают ценность тех кинематических моделей, которые в достаточной степени адекватны некоторым типам движений, реализация которых возможна в конкретных условиях.

The Kinematic Model of Nonuniform Rotation of Liquid Medium

Chkhitunidze M., Zhonzholadze N., Khvedelidze I.

Abstract

Development of perturbances in a liquid medium may be formally considered as a failure of uniform rotation, the result of which in most cases is initiation and development of nonuniform motion.

Perfect modeling of such process, regarding the solution of motion equation, may appear either very difficult or completely impossible due to specific mathematical problems. In this case the matter is the approximation of the rotation velocity field, which must be sufficiently adequate for the real motion. In some cases such goal is reached by means of some kinematic model of velocities. By strict standards it must satisfy certain criteria, so called conditions of motion dynamics.

We consider the above criteria are fulfilled by the following kinematic model

$$V_r = \frac{1}{2} u_0 \left(\frac{r}{R_0}\right) (cos\varphi + sin\varphi),$$
$$V_\varphi = u_0 \left(\frac{r}{R_0}\right) (cos\varphi - sin\varphi),$$

where the radius is a linear scale of the problem, u_0 is a characteristic velocity of the neutral polar wind.

It is obvious that the restrictions imposed by the probable dynamics reduce the class of the flows, which may be modeled in kinematic approximation. However, at the same time the restrictions raise the value of the kinematic models, which are sufficiently adequate for some types of motions realized in some cases.