საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია-გეოფიზიკის ინსტ. შრ. ტ. LVIII, 2003
Академия наук Грузии – Труды Института геофизики, т. LVIII, 2003

К вопросу о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в магнитосфере Земли

А. И. Гвелесиани

Для решения задачи гидродинамической или магнитогидродинамической устойчивости нужно исследовать решение нелинейной системы уравнений с частными производными. Здесь возникают большие математические трудности, поэтому для установления неустойчивости или устойчивости нужно линеаризировать нелинейные уравнения. Система линейных уравнений зависит от времени t. Следовательно, существуют решения, содержащие как множитель $e^{\lambda t}$. Система линейных уравнений обычно однородна, поэтому возникает задача о собственных значениях с параметром λ. Если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части, то решение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. Если некоторые из собственных значений λ имеют положительные вещественные части, то говорят, что решение неусточиво (теоремы Ляпунова) [10]. В том случае, когда все характеристические числа чисто мнимые комплексные числа, тогда имеется критическое положение или имсем только колебательное решение. Следовательно, для установления неустойчивости следует рассматривать бесконечно малые возмущения, для которых можно применить линеаризованные системы уравнений [1 - 14].

Критерии линейной теории являются только достаточными условиями потери устойчивости. Как известно, течение жидкости, которое по линейной теории считается устойчивым, может оказаться неустойчивым относительно возмущений конечной величины. Существует энергетический анализ, который приводит к глобальным утверждениям об устойчивости, которые принимают форму критериев, достаточных для устойчивости.

В определённом смысле линейная и энергетическая теории дополняют одна другую, причём первая (линейная теория) приводит к достаточным условиям для неустойчивости, в то время как вторая (энергетический анализ) даёт достаточные условия устойчивости [6 - 9].

Ниже мы будем следовать работе [1], что же касается других типов неустойчивости, то они изложены в работах [8 - 13]. В работах [1, 12, 13] обсуждаются лишь те вопросы устойчивости, которые должны играть важную роль в динамике радиационных поясов. Существуют магнитогидродинамические неустойчивости, которые исследуются с помощью линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики, куда входят интересующие нас вопросы неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Мы не будем касаться ниже вопроса микронеустойчивости. Математическое описание неустойчивости поверхности раздела неизбежно является приближённым, так как при выводе математических уравнений мы вынуждены игнорировать многие физические явления. В дополнение к физическим упрощениям обычно делаются вынужденные математические упрощения, либо же сложная система нелинейных математических уравнений не может быть решена нами. Поэтому нужно быть весьма осторожным при выводе условий (критериев) неустойчивости или, в особенности, условий устойчивости. После нахождения собственных значений исследуется реакция системы на малое возмущение. Нужно уяснить, растёт или не растёт амплитуда возмущения при росте времени t. Как было сказано в начале, решение линеаризованного уравнения должно содержать множитель $e^{\lambda t}$; нужно определить, яваляется ли λ комплексным числом и является ли его действительная часть положительным или отрицательным числом. Если $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$, тогда течение асимптотически неустойчиво, и это достаточное условие неустойчивости течения; когда же $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$, тогда по линейной теории течение жидкости устойчиво, но это условие не гарантирует достаточности критерия устойчивости.

При исследовании неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [1 – 4, 8, 11] мы будем пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{4\pi\rho}[rot\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = rot[v\,\boldsymbol{B}], \tag{2}$$

$$div\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{B}$- вектор напряжённости магнитного поля, v, ρ и p - соответственно, скорость, плотность и давление среды.

Предположим, что имеется плоская поверхность разрыва тангенциальных составляющих скорости и напряжённости магнитного поля z = 0, разделяющая два полупространства, 1 и 2, занятых однородной недиссипативной плазмой. Магнитное поле $\boldsymbol{B}$ параллельно скорости $\boldsymbol{u}$ и направлено вдоль оси x. Равновесие поверхности *определяется балансом давлений:*

$$p_1 + \frac{B_1^2}{8\pi} = p_2 + \frac{B_2^2}{8\pi} \quad \text{при } z = 0. \tag{5}$$

Для исследования устойчивости рассматриваются малые отклонения от состояния равновесия. Обозначим возмущения скорости, плотности, давления и маагнитного поля соответственно так:

$$\boldsymbol{u}(u,v,w),\ \delta\rho,\ \delta p \text{ и } \boldsymbol{b}(b_x,b_y,b_z). \tag{6}$$

Предположим, что пространственно-временная зависимость возмущённой величины

$$f(\boldsymbol{r},t) = f(z)exp(nt + ikx). \tag{7}$$

Возмущения, нормальные к магнитному полю, не оказывают влияния на развитие неустойчивости. Возмущения вдоль поля представляют интерес при исследовании устойчивости системы.

Линеаризованные уравнения движения имеют вид:

$$\rho\sigma u = -ik\delta p, \tag{8}$$

$$\rho\sigma v = -\frac{ikB}{4\pi}b_y, \tag{9}$$

$$\rho\sigma w = -\frac{d}{dz}(\delta p) - \frac{B}{4\pi}\left(\frac{db_x}{dz} - ikb_z\right), \tag{10}$$

$$\sigma = n + ikU. \tag{11}$$

Уравнение непрерывности, уравнения Максвелла и уравнение адиабаты соответственно принимают вид:

$$\sigma\delta\rho = -\rho(\nabla u), \tag{12}$$

$$\sigma b_x = ikBu - B(\nabla u), \tag{13}$$

$$\sigma b_y = ikBv, \tag{14}$$

$$\sigma b_z = ikBw, \tag{15}$$

$$ikb_x + \frac{d}{dz}b_z = 0. \tag{16}$$

$$\delta p = c_s^2\delta\rho, \quad c_s = \left(\gamma\frac{p}{\rho}\right)^{1/2}, \tag{17}$$

где c_s - скорость звука.

Величины v и b_y связаны только уравнениями (14) и (9). Исключая из этой системы v, получим:

$$\left(\sigma^2 + k^2V_A^2\right)b_y = 0, \tag{18}$$

где $V_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}}$ - альвеновская скорость.

Если $b_y \neq 0$, тогда

$$\sigma = \pm ikV_A. \tag{19}$$

Из (19) и (11) следует, что

$$n = \pm ik(V_A \pm U). \tag{20}$$

Колебания представляют собой альвеновские волны.

Из системы (8), (10), (12), (13), (15), (16) и (17) можно определить зависимости:

$$u = \frac{ic_s^2}{\sigma^2 + c_s^2k^2}\frac{dw}{dz}, \tag{21}$$

$$\left[\sigma^2\left(c_s^2 + V_A^2\right) + V_A^2c_s^2k^2\right]\frac{d^2w}{dz^2} = \left(\sigma^2 + c_s^2k^2\right)\left(\sigma^2 + V_A^2k^2\right)w. \tag{22}$$

Решения, обращающиеся в нуль при $z = \pm\infty$, записываются так:

$$w_1 = A_1exp(m_1z), \quad z < 0; \qquad w_2 = A_2exp(-m_2z), \quad z > 0; \tag{23}$$

$$m_j^2 = \frac{\left(\sigma_j^2 + k^2V_{Aj}^2\right)\left(\sigma_j^2 + k^2c_{sj}^2\right)}{\sigma_j^2\left(c_{sj}^2 + V_{Aj}^2\right) + k^2V_{Aj}^2c_{sj}^2}, \quad j = 1, 2. \tag{24}$$

Полученные решения должны удовлетворять следующим граничным условиям.

1. Нормальная компонента смещения должна быть непрерывной при $z = 0$; действительно, $\frac{w}{\sigma}$ непрерывно при $z = 0$, поэтому

$$A_1\sigma_2 = A_2\sigma_1. \tag{25}$$

2. Нормальная компонента магнитного поля b_z должна быть непрерывной при при z =0; действительно, согласно (15), $b_z = ikB\frac{w}{\sigma}$, в силу условия (25), непрерывна при $z=0$.

3. Нормальная компонента напряжения дожна быть непрерывна при $z=0$, а это приводит к граничнму условтю:

$$\delta p_1 + \frac{1}{4\pi}(Bb_1) = \delta p_2 + \frac{1}{4\pi}(Bb_2), \tag{26}$$

$$\delta p_j = \frac{(-1)\rho_j \sigma_j c_{sj}^2}{\sigma_j^2 + c_{sj}^2 k^2}\frac{dw}{dz}, \qquad \frac{(Bb)}{4\pi} = (-1)T_j \frac{dw_j}{dz}, \tag{27}$$

$$T_j = \frac{\sigma_j^2\left(c_{sj}^2 + V_{Aj}^2\right) + c_{sj}^2 k^2 V_{Aj}^2}{\sigma_j^2 + c_{sj}^2 k^2}, \qquad j = 1, 2, \tag{28}$$

где

$$\sigma_j = n + iku_j. \tag{29}$$

Из (26), с учётом (25), (27) - (29), получим:

$$\frac{\rho_1 m_1 T_1 A_1}{\sigma_1} = -\frac{\rho_2 m_2 T_2 A_2}{\sigma_2}. \tag{30}$$

Из (30), с учётом (25) и (24), получим характеристическое уравнение относительно n:

$$\rho_1 T_1^{1/2}\left(\sigma_1^2 + k^2 V_{A1}^2\right)^{1/2} = (-1)\rho_2 T_2^{1/2}\left(\sigma_2^2 + k^2 V_{A2}^2\right)^{1/2}. \tag{31}$$

Решить (31) относительно n очень трудно, но, в принципе, возможно, а если рассмотреть частный случай, когда $\rho_1 = \rho_2$, $V_{A1} = V_{A2}$, $c_{s1} = c_{s2}$, $U_1 = U$, $U_2 = -U$, получим:

$$n^4 + 2n^2\left(k^2U^2 + c_s^2k^2\right) + k^4U^4 - 2c_s^2k^2U^2 + \frac{2c_s^4k^4V_A^2}{V_A^2 + c_s^2} = 0. \tag{32}$$

Полагая $U_p = \frac{in}{k}$, получим:

$$U_p^4 - 2U_p^2\left(c_s^2 + U^2\right) + \left(U^4 - 2U^2c_s^2 + \frac{2c_s^2V_A^2}{V_A^2 + c_s^2}\right) = 0, \tag{33}$$

$$U_p^2 = c_s^2 + U^2 \pm c_s\left[c_s^2 + 4U^2 - \frac{2c_s^2V_A^2}{c_s^2 + V_a^2}\right]^{1/2} \tag{34}$$

Случай 1.

Допустим, что дискриминант (34) $D > 0$. Если $U_p^2 = c_s^2 + U^2 \pm c_s[D]^{1/2} > 0$, тогда $n^2 = -k^2U_p^2$, $n = \pm ikU_p$. Имеем колебательное решение, т.е. имеем неопределённость, вообще имеем неустойчивое состояние. Если $U_p^2 < 0$, тогда $n = \pm ik|U_p|$, следовательно, опять имеем неустойчивость. Вспомним определение устойчивости. Если $D < 0$, тогда $U_p^2 = a + ib$, $\quad n = \pm i\sqrt{a \pm ib} = \pm i\sqrt{r}\,exp(\pm i\varphi)$, $\quad n = \pm i\sqrt{r}(cos\varphi \pm i\,sin\varphi) =$

$\pm i\sqrt{r}\cos\varphi \mp \sqrt{r}\sin\varphi$. Здесь имеем колебательную неустойчивость. Исследование, проведённое Хессом, правильное.

В работе Хесса в формуле (31) отсутствует знак (-). Но это опечатка. Действительно, допустим имеем:

$$\frac{\rho_1 m_1 T_1 A_1}{\sigma_1} = + \frac{\rho_2 m_2 T_2 A_2}{\sigma_2}. \tag{35}$$

Рассмотрим случай, когда $\rho_1 = \rho_2$, $V_{A1} = V_{A2} = V_A$, $c_{s1} = c_{s2} = c_s$, $U_1 = U$, $U_2 = -U$; получим:

$$\sigma_1^2 + V_A^2 k^2 = \sigma_2^2 + V_A^2 k^2, \quad \sigma_1 = n + ikU, \quad \sigma_2 = n - ikU; \tag{36}$$

$$\sigma_1^2 = n^2 + 2knUi - k^2U^2, \quad \sigma_2^2 = n^2 - 2knUi - k^2U^2. \tag{37}$$

Отсюда получаем, что $n = 0$.

А если взять со знаком (-), как в (31), то получим:

$$2\left(n^2 - k^2U^2 + k^2V_A^2\right) = 0. \tag{38}$$

Следовательно,

$$n^2 = k^2\left(U^2 - V_A^2\right). \tag{39}$$

Если $U > V_A$, тогда

$$n_{1,2} = \pm k\sqrt{U^2 - V_A^2}, \tag{40}$$

и имеем неустойчивость, а если взять $V_A > U$, тогда

$$n = \pm ik\sqrt{V_A^2 - U^2}, \tag{41}$$

имеет место колебательная неустойчивость.

Допустим, что Хесс не знал этого, тогда рассмотрим уравнение (33) и перейдём к пределу, когда $c_s \to \infty$ (при этом U_p по модулю конечное число). Получим

$$2\left(U_p^2 - U^2 + V_A^2\right) = 0, \tag{42}$$

$$U_p^2 = V_A^2 - U^2, \tag{43}$$

а если вспомнить, что $U_p = \frac{ni}{k}$, получим

$$n^2 = k^2\left(U^2 - V_A^2\right). \tag{44}$$

Следовательно, (44) совпадает с (39), а это значит, что там опечатка.

Теперь вспомним работу Сыроватского [11], где корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\omega = k\left(\frac{v_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\left(u_{01}^2 + u_{02}^2\right) - v_0^2}\right), \tag{45}$$

где

$$u = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{46}$$

При переходе через плоскость $z = 0$ скорость получает приращение v_0, а у Хесса $v_0 = 2U$. Следовательно,

$$u_{01} = u_{02} = V_A, \tag{47}$$

$$\omega = k\left(U \pm \sqrt{V_A^2 - U^2}\right). \qquad (48)$$

Вместе с тем $n = -i\omega$, $\omega = in$, следовательно,

$$n = -ik\left(U \pm \sqrt{V_A^2 - U^2}\right), \qquad (49)$$

и имеем колебательную неустойчивость.

В книге Ландау и Лифшица [4] приводится доказательство того, что условие устойчивости, полученное Сыроватским [11] из линейной теории, т.е. с помощью первого приближения, не является достаточным условием устойчивости. Это условие устойчивости характеризует то, что по мере роста времени t поверхность разрыва остаётся такой же, какой она была до возмущения [7 - 9]. В работе [7] доказывается, что течение, устойчивое согласно критерию линейной устойчивости, вовсе не обязательно будет устойчивым. Для понимания основных физических особенностей неустойчивости таких течений требуется анализ нелинейной задачи.

Литература

[1] Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат, 1972, 352 с.

[2] Ламб Г. Гидродинамика. М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947, 928 с.

[3] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955, 560 с.

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.:Наука, 1986, 736 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, 620с.

[6] Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958, 194 с.

[7] Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981, 638 с.

[8] Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, 372 с.

[9] Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983, 300 с.

[10] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 331 с.

[11] Сыроватский С. И. Об устойчивости тангенциальных разрывов в магнитогидродинамической среде. ЖЭТФ, т. 24, вып. 6, 1953, сс. 623 – 630.

[12] Talwar S. P. Hydromagnetic stability of the magnetospheric boundary. J. Geophys. Res., 1964, v. 69, pp. 2707 – 2713.

[13] Fejer I. A. Hydromagnetic stability at a fluid velocity discontinuity between compressible fluids. Phys. Fluids. 1964, v. 7, p. 499.

[14] Gervin R. A. Stability of the interface between two fluids in relative motion. Rev. Mod. Phys., 1968, v. 40, N 3, pp. 652 – 658.

კელვინ-ჰელმჰოლცის არამდგრადობის საკითხისათვის დედამიწის მაგნიტოსფეროში

ა. გველესიანი

რეზიუმე

განიხილება მაგნიტოჰიდროდინამიკური არამდგრადობის წრფივი თეორიის ზოგიერთი შედეგი კელვინ-ჰელმჰოლცის კუმშვადი პლაზმის არამდგრადობის შემთხვევისათვის, რომელთა სარწმუნოობა არ უნდა იწვევდეს ეჭვს.

To the problem of the Kelvin-Helmholtz instability in the Earth's magnetosphere

A. Gvelesiani

Abstract

Here it is discussed some results of the linear theory of the magnetohydrodynamical instability of the compressible plasma in the case of Kelvin-Helmholtz's instability reliability of which does not cause doubt.