საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია–გეოფიზიკის ინსტ. შრ. ტ. LVIII, 2003
Академия наук Грузии – Труды Института геофизики, т. LVIII, 2003

Об единственности решения обратной задачи теории потенциала для круговых многоугольников

Д. В. Капанадзе

Решение обратной задачи теории потенциала имеет важное теоретическое и прикладное значение. Практическая важность обратных задач настолько значительна, что за последнее время они оказались среди актуальных задач современного математического анализа. В частности известно, что обратная задача теории потенциала является математической моделью гравиразветки полезных ископаемых и изучения внутреннего строения Земли. Для практики требуется дальнейшее развитие теории [1].

Впервые единстенность ее решения в классе звездных областей постоянной плотности была доказана П. С. Новиковым [2], результаты которого расширены в работах [3-8]. В работе [1] В. Н. Страхов поставил нерешенные задачи математической теории гравиметрии. В этой заметке исследуются две задачи (проблема №2, проблема №8 [1]).

Доказывается единственность решения обратной задачи для круговых многоугольников [1], сначала для постоянной плотности, а затем для положительной плотности $\mu(x_1,x_2)$, которая не меняется по направлению Ox_2, $\mu(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{n}a_k x_1^k$.

Для доказательства теоремы используются обобщенные гармонические функции, т. е. гармонические функции, для которых граничными значениями являются обобщенные функции конечного порядка [9, 10].

Введем некоторые определения и обозначения.

<u>**Определение.**</u> Круговой многоугольник это кусочно – гладкая односвязная, ограниченная область, граница которой состоит из дуг окружностей [1].

Определим логарифмические потенциалы для кусочно - гладкой области $Q(Q\subset R^2)$

$$V^g(x)=\int_Q g(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy,\qquad V^\Psi(x)=\int_{\partial Q}\Psi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}ds,$$

где ∂Q - граница области Q, $g\in L_1(Q)$, $\Psi\in L_1(\partial Q)$. Через Q обозначается связная компонента дополнения $R^2-\overline{Q}$, которая содержит бесконечно удаленную точку, ν_x - внешняя нормаль для области в гладкой точке x, $(\nu\wedge x_2)$ - угол между ν и Ox_2, $\varnothing$ – пустое множество, $C_0^1(R^2)$ - финитные непрерывно – дифференцируемые функции на плоскости R^2, $\{C_0^1(R^2)\}^*$ - пространство непрерывных функционалов на $C_0^1(R^2)$. Здесь рассматриваются только компактные непрерывные функционалы или обобщенные функции на компакте. $\alpha\in A$ означает, что α принадлежит множеству A, $\alpha\notin A$, α не принадлежит множеству A, $A\cap B$ - пересечение множеств A, B; $A\cup B$ - объеденение множеств A, B; $\rho(x)$ - кривизна кривой в точке x.

Теорема 1. Пусть Ω_1, Ω_2 круговые многоугольники на плоскости R^2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Тогда решение обратной задачи теории потенциала единственно.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что

$$\int_{\Omega_1} \ln \frac{1}{|x-y|\,dy} = \int_{\Omega_2} \ln \frac{1}{|x-y|\,dy} \qquad x \in \Omega_\infty . \tag{1}$$

Возьмем гладкую точку $x_0 \in \partial\Omega_\infty$, $x_0 \in \partial\Omega_1$, $x_0 \notin \partial\Omega_2$. Сделаем поворот и паралельный перенос координатной системы, после которых точка x_0 лежит на оси Ox_1, касательная прямая в точке x_0 параллельна оси Ox_2; очевидно, что равенство потенциалов сохраняется после преобразования координатной системы. Обозначим $x = (x_1, x_2)$.

$x_0 = (x_0^1, x_0^2)$, $|x_0| = r_0$, $\sigma_1 = \{x : |x - x_0| < \partial\} \cap \partial\Omega_\infty$, $\sigma = \{(x_1 x_2) : (x_1 x_2) \in \sigma_1,\ x_2 > 0\}$.

В силу условия $(x_0 \notin \partial\Omega_2)$ существует число $\gamma > 0$ такое, что $\sigma_1 \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_\infty$, $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$. Ясно, что дуга σ лежит на окружности $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$. Уравнение кривой σ имеет вид $x_2 = \tau(x_1)$, $x_1 \in (a,b) = \{x_1 : (x_1, x_2) \in \sigma\}$, $\tau(x_1) = \sqrt{r^2 - x_1^2}$. Из равенства потенциалов (1) имеем, что

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega_2} \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} dx \tag{2}$$

для произвольного решения задачи Дирихле V из класса $C^1(\Omega_0)$, где односвязная ограниченная область Ω_0 удовлетворяет условиям: $\Omega_0 \in C^{(2,\alpha)}$, $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \subset \overline{\Omega}_0$, $\sigma_1 \subset \partial\Omega_0$. Известно, что

$$V(x) = -\int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} \varphi(y) dSy,\ x \in \Omega_0,\ V|_{\partial\Omega_0} = \varphi, \tag{3}$$

где G – функция Грина области Ω_0 задачи Дирихле. Известно, что функция Грина G удовлетворяет условиям

$$|G(x,y)| \le \frac{C_1}{|x-y|},\quad \left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i}\right| \le \frac{C_1}{|x-y|},\quad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial y_i \partial y_j}\right| \le \frac{C_1}{|x-y|^2}. \tag{4}$$

Из (2) по формуле Гфусса-Остроградского получаем

$$\int_{\partial\Omega_1} V(x)\cos(\nu \wedge x_2)\, ds = \int_{\partial\Omega_2} V(x)\cos(\nu \wedge x_2)\, ds. \tag{5}$$

Ясно, что если $(x_1, x_2) \notin \sigma$, то

$$|\cos(\nu \wedge x_2)| = \left|\frac{1}{\sqrt{1 + [\tau^1(x_1)]^2}}\right| = \frac{1}{r_0}\sqrt{x_0^2 - x_1^2}\left|\lim_{x_1 \to r_0} \frac{\partial\sqrt{x_0^2 - x_1^2}}{\partial x_1}\right| = \infty . \tag{6}$$

Из (5) следует, что $\left(V|_{\partial\Omega_0} = \varphi\right)$

$$\int_{\sigma} \varphi(x)\cos(\gamma \wedge x_2) ds = \int_{\partial\Omega_2} \varphi(x)\cos(\gamma \wedge x_2) ds - \int_{\partial\Omega_1 - \sigma} \varphi(x)\cos(\gamma \wedge x_2) ds .$$

Теперь рассмотрим обобщенное граничное значение для гармонической функции V

$$\varphi = \frac{\partial \delta x_1(t_1)}{\partial t_1} x \delta x_2(t_2), \qquad x = (x_1 - x_2) \in \sigma.$$

Здесь $(\varphi, \psi) = -\psi(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \sigma$, $\psi \in C_0^1(R^2)$.

Кроме того нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} |V(x)| \le \dfrac{C_2}{|x-y|^2} & x \in \partial\Omega_2, \; y \in \sigma, \\ |V(x)| \le \dfrac{C_2}{|x-y|} & x \in \partial\Omega_1 - \sigma, \; y \in \sigma. \end{cases} \tag{7}$$

Итак

$$|V(x)| \le \frac{2C_2}{\gamma}, \quad x \in \nabla\Omega_2 \cup (\partial\Omega_1 - \sigma); \; |x_0 - y| \le \frac{\gamma}{2}, \; C_2 = \text{const} > 0.$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{r_0^1 - y_1^2}} \le \frac{2C_2}{\gamma} \left(|\partial\Omega_1| + |\partial\Omega_2| \right), \tag{8}$$

где $|\partial\Omega_i|$ - длина кривой $\partial\Omega_i$; $i = 1,2$. Перейдем к пределу при $y_1 \to r_0$, тогда получаем

$$\infty \le \frac{2C_2}{\gamma} \left(|\partial\Omega_1| + |\partial\Omega_2| \right).$$

Мы пришли к противоречию. Георема 1 доказана. Таким образом проблема № 2 [1] имеет положительное решение.

Теперь рассмотрим плотность $\mu(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k$. Предположим, что $\mu(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Из равенства потенциалов $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$

$$\int_{\Omega_1} \mu(x) \ln \frac{1}{|x-y|} dy = \int_{\Omega_2} \mu(x) \ln \frac{1}{|x-y|} dy \qquad x \in \Omega_\infty$$

имеем, что

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial V_\varphi}{\partial x_2} \mu(x_1) dx = \int_{\Omega_2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial x_2} \mu(x_1) dy, \tag{9}$$

для любой гармонической функции V_φ из класса $C^1(\overline{\Omega}_0)$. Область Ω_0 определяется аналогично тому, как это было в случае постоянной плотности. Из (9) следует, что

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial(\mu(x_1) V_\varphi)}{\partial x_2} dx = \int_{\Omega_2} \frac{\partial(\mu(x_1) V_\varphi)}{\partial x_2} dx.$$

Отсюда снова получим, что

$$\int_{\partial\Omega_1} \mu(x_1) V_\varphi(x) \cos(\nu_x \wedge x_2) ds = \int_{\partial\Omega_i} \mu(x_1) V_\varphi(x) \cos(\nu_x \wedge x_2) ds. \tag{10}$$

Пусть $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ гладкая точка из $\partial\Omega_\infty$, которая удовлетворяет условиям: $x_0 \in \sigma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_\infty$, $x_0 \notin \overline{\Omega}_2$. Сделаем поворот координатной системы вокруг начала координатной системы на угол α после которого нормаль в точке x_0 для области Ω_1 паралельна оси Oy_1. После поворота координатную систему обозначим через (y_1, y_2); Итак линейное преобразование имеет вид:

$$x_1 = y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha,$$
$$x_2 = y_1 \cos\alpha + y_2 \cos\alpha.$$

Из (11) после преобразования имеем

$$\int_{\partial\Omega_1} \mu(y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha) V_\varphi(y) V_\varphi(y) \cos(\nu y_2) ds =$$
$$= \int_{\partial\Omega_2} \mu(y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha) V_\varphi(y) V_\varphi(y) \cos(\nu y_2) ds. \qquad (11)$$

Аналогично тому, как это было раньше, получаем

$$\int_\sigma \varphi(y)\mu(y_1,y_2) \frac{ds}{\sqrt{1+\left[\tau_1'\right]^2}} = \int_{\partial\Omega_2} V_\varphi(y)\mu_1 \cos(\nu^\wedge x_2) ds - \int_{\partial\Omega_1-\sigma} V_\varphi(y)\mu_1 \cos(\nu y_2) ds, \quad (12)$$

где

$$\mu_1(y_1,y_2) = \mu(y_1\cos\alpha - y_2 \sin\alpha),$$
$$\cos(\gamma^\wedge y_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(y_1)\right]^2}}.$$

Здесь $y_2 = \tau_1(y_1)$, $y_1 \in (a,b) = \{y_1 : (y_1,y_2) \in \sigma\}$ уравнение кривой σ. После поворота образ точки $x_0 = (x_1,x_2)$ обозначим через $y_0 = (y_1,y_2)$. Ясно, что

$$\lim_{y_1 \to y_2} \tau_1'(y_1) = \infty. \qquad (13)$$

Теперь снова рассмотрим граничное значение

$$\varphi = \pm \frac{\partial \delta y_1(t_1)}{\partial t_1} X \delta y_2(t_2), \quad y = (y_1,y_2) \in \sigma.$$

Из (12) получаем, что

$$\left| \sup_{(y_1,y_2)\in\sigma} \left(\varphi, \frac{\mu_1(t_1,t_2)}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(t_1)\right]^2}} \right) \right| = \left| \sup_{(y_1,y_2)\in\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\mu_1(t_1,t_2)}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(t_1)\right]^2}} \right) \right| =$$

$$= \left| \sup_{(y_1,y_2)\in\sigma} \left\{ \pm \left[\frac{\partial \mu_1}{\partial t_1} \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(t_1)\right]^2}} \right] \pm \left[\mu_1 \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tau_1(t_1)\right]^2}} \right] \right\} \right|.$$

Очевидно, что

$$\sup_{(y_1,y_2)\in\sigma} \left| \frac{\partial \mu}{\partial t_1} \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(t_1)\right]^2}} \right| < \infty.$$

С другой стороны нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{\sqrt{1+\left[\tau_1'(t_1)\right]^2}} = -\frac{2\tau_1''(t_1)\cdot\tau_1'(t_1)}{\left[1+\left(\tau_1'(t_1)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Выражение

$$\rho(y_1) = \frac{\tau_1''(y_1)}{\left[1+\left(\tau_1'(t_1)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

есть кривизна дуги σ, которая постоянна. Следовательно в силу (13) имеем

$$\sup_{(y_1,y_2)\in\sigma}\left|\mu_1(y_1,y_2)\frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+[\tau']^2}}\right]_{t_1=y_1}\right|=\infty. \qquad (14)$$

С другой стороны

$$\sup_{y\in\partial\Omega_2}|V_\varphi(y)|<\infty, \qquad \sup_{y\in\partial\Omega_1-\sigma}|V_\varphi(y)|<\infty. \qquad (15)$$

Из (12), (14), (15) получается противоречие. Теорема доказана.

<u>Замечание.</u> Если условие положительности плотности нарушается (в частности $\mu(x_1^0,x_2^0)=0$), то единственность решения обратной задачи сохраняется, но доказательство осложняется.

Таким образом проблема № 8 [1] имеет положительное решение.

Доказанные утверждения сохраняют силу в случае R^3 для ньютоновских потенциалов.

Литература

1. Страхов В. Н. Нерешенные проблемы математической теории плоской задачи гравиметрии и магнитометрии. || изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, № 8, с. 3 - 28.
2. Новиков П. С. О единственности решения обратной задачи теории потенциала. || Дан СССР, 1938, Т. 18, № 3, с. 165 – 168.
3. Сретенски Л. Н. О единственности определения формы притягивающегося тела по значениям его внешнего потенциала. || ДАН СССР, 1954, Т. 99; 1, с. 20 – 22.
4. Шашкин Ю. А. О единственности обратной задачи потенциалов. || ЛАН СССР, 1957, Т. 115, № 1, с. 64 – 66.
5. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала. Мат. Заметкт, Т. 14, № 5, 1973, с. 755 – 767.
6. Страхов В. Н., Бродский М. А. О единственности решения двумерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии многоугольников. || ДАН СССР, 1982, Т. 264, № 2, с. 318 – 322.
7. Исаков В. И. О единственности решения обратной задачи теории потенциала. || ДАН СССР, 1979, Е.245, № 5, с. 1045 – 1047.
8. Капанадзе Д. В. О единственности решения обратной задачи потенциала. || Сообщения АН Груз. СССР, 1989, Т. 135, № 3, с. 537 – 540.
9. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике, М: Наука, 1977.
10. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике, М.: МИР, 1978.

წრიული მრავალკუთხედებისათვის პოტენციალის თეორიის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობის შესახებ

ჯ. კაპანაძე

რეზიუმე

სტატიაში დამტკიცებულია წრიული მრავალკუთხედებისათვის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობა ორი შემთხვევისათვის: პირველი მუდმივი სიმკვრივისა და მეორე დადებითი სიმკვრივისათვის, რომელიც არ იცვლება მიმართულების მიხედვით.

On uniqueness of solving of the potential theory`s inverse problem for polygons

D. Kapanadze

Abstract

In the paper the uniqueness of solving of the inverse problem for arc polygons is proved for two cases: first, for constant density and second, for positive density, which does not change according to the direction.