

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДРЕЙФОВЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Абурджания Г.Д.<sup>1,2)</sup>, Рогова Д.Л.<sup>2)</sup>, Харшиладзе О.А.<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> Институт геофизики им. М.З. Нодиа,  
Ул. Аликсидзе 1, 0193 Тбилиси, Грузия;

<sup>2)</sup> Тбилисский государственный университет,  
Ул. Университетская 2, 0143 Тбилиси, Грузия  
E-мэйл: aburi@mymail.ge, g.aburjania@gmail.com

### 1. Введение

В последнее время заметно возрос интерес к исследованию динамики низкочастотных дрейфовых волн и, образующихся на них, нелинейных уединенных вихревых структур в замагниченной плазме. Как известно [1-4], дрейфовые волны существуют благодаря неоднородности равновесных параметров плазмы и относятся к типу градиентных волн. Такой высокий интерес к дрейфовым возмущениям обусловлен пониманием важной роли подобного рода колебаний, как для лабораторной плазмы [1-4], так и для плазмы ионосферы и магнитосферы [5,6]. Обнаружено, что дрейфовые волны самопроизвольно локализуются в виде уединенных регулярных вихревых структур, которые могут быть ответственны за высокий уровень флуктуационных электромагнитных полей и турбулентных процессов в плазме, приводящих к аномальным коэффициентам переноса поперек магнитного поля [7-10]. Причем, в отличие от хорошо известного одномерного нелинейного уравнения Кортевега - де Вриза (КДВ), здесь нелинейные свойства вихревых солитонов описываются не только одномерной скалярной, но и двумерной векторной нелинейностью. К настоящему времени теоретически показано существование в замагниченной неоднородной плазме значительного числа различных типов стационарных, сильно локализованных солитонов и вихрей, распространяющихся поперек или, почти поперек, равновесного магнитного поля [8-10]. Естественно предположить, что сильная турбулентность дрейфовых волн представляет собой газ из уединенных и, поэтому, сравнительно слабо взаимодействующих вихрей-солитонов, а параметры и динамика взаимодействия вихрей определяют характеры турбулентного спектра и аномального переноса частиц и тепла в плазменной среде [10-12].

В связи с этим, актуальным представляется исследование процессов генерации, усиления, самоорганизации и взаимодействия структур между собой и со средой. Изучение динамики вихревых структур, в основном, велось для идеально проводящей плазмы. Поэтому вызывает интерес изучение эволюции вихрей в относительно реальной, диссипативной плазме. В работах [13,14] разработан математический аппарат многомерной теории возмущения для описания эволюции нелинейных вихревых структур в диссипативной диспергирующей среде. Аналитически показано [13], что нелинейное резонансное взаимодействие длинноволновых дрейфовых солитонов с электронами плазмы, резонансное циклотронное взаимодействие коротковолновых солитонов с горячими ионами плазмы и конечная теплопроводность плазмы приводят к нестационарным процессам и к росту амплитуды структур по времени. На основе уравнения типа Хасегавы-Мимы (содержащего лишь векторную нелинейность), в работе [14] численно-аналитическими методами изучается влияние трения между электронами и ионами (нейтралями) на

временную релаксацию дипольных вихрей на дрейфовых потенциальных волнах в плазме с однородной температурой электронов ( $T_e \neq 0$ ,  $\nabla T_e = 0$ ) и холодными ионами ( $T_i \sim 0$ ). В настоящей работе, в отличие от [14], рассматривается двухтемпературная ( $T_e \gg T_i \neq 0$ ) пространственно-неоднородная плазма с учетом силы трения, магнитной и столкновительной вязкости и с неоднородной температурой электронов ( $\nabla T_e \neq 0$ ). При этом получается новый класс динамического уравнения, существенно отличающийся от вышеотмеченных нелинейных уравнений, который содержит как скалярную, так и векторную нелинейность.

В зависимости от доминирующей роли векторной или скалярной нелинейности, стационарных дрейфовых двумерных вихри разделяются на два типа, соответственно, дипольных и монополюсных (круглых). Однако, при наличии скалярной нелинейности (обусловленной градиентом равновесной температуры плазмы), дипольный вихрь не является точным стационарным решением, и реализуется нестационарная динамика локализованного волнового пакета. В реальной плазменной среде еще одним источником нестационарности процессов (как уже отмечалось выше) являются диссипативные эффекты (трение, вязкость, конечная теплопроводность и т.д.) [10, 13, 14].

В настоящее время для этих уединенных пакетов волн не существуют аналитические методы, способные дать точное (без введения малого параметра) решение нестационарной, пространственно-двумерной задачи. Имеющиеся точные решения, отмеченные выше, получены в частных случаях – для стационарных уединенных волн, для которых далее нестационарность учитывается как малая добавка. В связи с этим, важным становится использование численных методов для решения задач нелинейной нестационарной динамики дрейфовых вихрей в плазме. Цель настоящей работы состоит в проведении аналитических, численных моделирований и численных экспериментов для исследования эволюции нелинейных дрейфовых вихрей в неоднородной, замагниченной плазменной среде с учетом температурных градиентов и относительно реальных диссипативных процессов.

В разделе 2 получено нелинейное уравнение эволюции длинноволновых дрейфовых возмущений в такой плазме, обобщающей известное уравнение Хасегавы-Мимы. В разделе 3 определяются временные и пространственные характеристики рассматриваемых дрейфовых возмущений, и построено новое стационарное вихревое (дипольное) решение нелинейного динамического уравнения для дрейфовых волн. В разделе 4 анализируются результаты численного решения исходного нелинейного динамического уравнения и численных экспериментов. В приложениях 1 и 2 приводится новый алгоритм численного решения полученного динамического уравнения и доказывается единственность решения. Обсуждение результатов проводится в разделе 5.

## 2. Динамические уравнения длинноволновых дрейфовых волн в вязкой плазме

Равновесное состояние плазмы характеризуем неоднородной равновесной плотностью  $n_0(x)$ ,  $\nabla n_0 \parallel x$  и равновесной постоянной индукцией магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленным вдоль оси  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{z}$ . Кроме того, плазму считаем неизотермической  $T_e \gg T_i$  с неоднородными температурами электронов  $T_e(x)$  и ионов  $T_i(x)$  ( $\nabla T_e$ ,  $\nabla T_i \neq 0$ ) и полностью ионизированной.

Мы рассматриваем потенциальные, относительно длинноволновые ( $k_{\perp}^2 \rho_i^2 \ll 1$ ) возмущения плазмы,  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , (где  $k_{\perp} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  горизонтальное волновое число,  $\rho_{i,e} = (T_{i,e} / m_{i,e} \omega_{Bi,e})^{1/2}$  - ларморовский радиус ионов (электронов),  $\omega_{Bi,e} = eB_0 / m_{i,e}c$  - циклотронная частота ионов (электронов),  $e$  – элементарный заряд,  $m_{i,e}$  - масса иона (электрона),  $c$  – скорость света, с частотой  $\omega$ , низкой по сравнению с ионной циклотронной

частотой ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) и длиной волны  $\lambda = 2\pi/k_{\perp}$ ,  $\rho_i \leq \lambda \ll \rho_e$ , распространяющейся поперек магнитного поля (т.е.  $\partial/\partial z \sim k_z \sim 0$ ). Такие возмущения при не слишком малой плотности плазмы можно считать квазинейтральными, так что

$$n_e \equiv n_i, \quad (1)$$

где  $n_e$ ,  $n_i$  – плотность электронов и ионов. Дифференцируя (1) по времени и используя уравнение непрерывности ионов, получаем:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_i / e = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{j}_i = e n_i \mathbf{V}_i$  – плотность ионного электрического тока,  $\mathbf{V}_i$  – макроскопическая скорость ионов, которую определяем из уравнения движения с учетом поперечной инерции, силы трения и поперечной вязкости ионов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \right) \mathbf{V}_{i\alpha} = \frac{e_i}{m_i} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_0]_{\alpha} \right) - \frac{T_i}{m_i n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x_{\alpha}} - \frac{1}{m_i n_i} \frac{\partial \bar{\pi}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} - \nu_{im} \mathbf{V}_{i\alpha}, \quad (3)$$

где  $\nu_{im}$  – частота столкновений ионов с нейтралами, а тензор ионной вязкости  $\bar{\pi}$  определяется выражением [1]:

$$\bar{\pi}_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta}^M + \pi_{\alpha\beta}^M, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \pi_{xx}^M &= -\pi_{yy}^M = -\frac{P_i}{2\omega_{Bi}} \left( \frac{\partial V_x^E}{\partial y} + \frac{\partial V_y^E}{\partial x} \right), & \pi_{xy}^M &= \pi_{yx}^M = \frac{P_i}{2\omega_{Bi}} \left( \frac{\partial V_x^E}{\partial x} - \frac{\partial V_y^E}{\partial y} \right), \\ \pi_{xx}^{st} &= -\pi_{yy}^{st} = -\eta_i \left( \frac{\partial V_x^E}{\partial x} - \frac{\partial V_y^E}{\partial y} \right), & \pi_{xy}^{st} &= \pi_{yx}^{st} = -\eta_i \left( \frac{\partial V_x^E}{\partial y} + \frac{\partial V_y^E}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

Здесь  $\pi_{\alpha\beta}^M$  – бездиссипативная магнитная вязкость, обусловленная поперечной инерцией ионов;  $\pi_{\alpha\beta}^{st}$  – столкновительная вязкость ионов;  $V^E = c(1 + T_i/T_e) \mathbf{e}_z \cdot \nabla \phi / B_0$  – скорость дрейфа в скрещенных полях, которая отличается от приведенного в [1] значения дополнительным фактором – отношением температуры ионов и электронов  $T_i/T_e$ , обусловленном вторым членом в правой части уравнения (3) (в [1] при представлении (4), предполагалось, что  $T_e \gg T_i \rightarrow 0$ );  $\eta_i = 0.3 \nu_{ii} P_i / (m_i \omega_{Bi}^2)$  – коэффициент столкновительной вязкости;  $\nu_{ii}$  – частота ион-ионных столкновений;  $P_i = n_i T_i$  – давление ионов;  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ .

В теории дрейфовых волн с учетом стандартного условия  $V_{\phi} \ll V_{Te}$  (где  $V_{\phi} = \omega/k$  – фазовая скорость волны,  $V_{Te} = (2T_e/m_e)^{1/2}$  – тепловая скорость электронов), легко увидеть, что распределение плотности электронов в поле электростатического потенциала  $\phi$  близко к бальцмановскому [1]:

$$n_e = n_0(x) \exp[e\phi/T_e(x)]. \quad (5)$$

Здесь  $n_0$ ,  $T_e$  – плотность и температура электронов в невозмущенном состоянии.

Рассматривая низкочастотные по отношению к ионной гирочастоте возмущения,  $\omega/\omega_{Bi} \ll 1$ , с помощью уравнений (3), (4) представляем поперечную скорость ионов в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^E + \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^I + \mathbf{v}^N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T &= \left( \frac{\mathbf{e}_z T_i}{m_i \omega_{Bi}} - \frac{\mathbf{e}_T \sigma}{m_i \omega_{Bi}} \right) \phi, & \rho_i^2 &= \frac{c}{2B_0} [\mathbf{e}_T \cdot \nabla(\Delta\phi)], \\ \mathbf{v}^I &= \frac{1}{\omega_{Bi}} \frac{c}{B_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho_i^2 \nabla(\Delta\phi) - (1 + \sigma) \nabla\phi \right), \\ \mathbf{v}^N &= -\frac{\eta_i}{n_i \omega_{Bi}} \frac{c}{B_0} \nabla(\Delta\phi) - \frac{\nu_{im}}{\omega_{Bi}} \frac{c}{B_0} \nabla\phi; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{B_0} (1 + \sigma) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right);$$

$e_y$  – единичный вектор вдоль оси  $y$ ;  $\nabla(\partial / \partial x, \partial / \partial y)$  и  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  двумерные набла оператор и дельта (лапласиан) оператор, соответственно.

Комбинируя (1)-(7), получим нелинейное уравнение для электростатического потенциала:

$$\frac{d}{dt} \left( \varphi - \rho_0^2 \Delta \varphi + \frac{1}{2} \rho_0^2 \rho_i^2 \Delta^2 \varphi \right) + V_{*e} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{e}{T_e} V_{T*} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_{in} \rho_0^2 \Delta \varphi - \frac{\eta_1}{n_0} \rho_0^2 \Delta^2 \varphi. \quad (8)$$

Здесь  $V_{*e} = -(cT_e / (eB_0)) \alpha_n$  – дрейфовая скорость электронов,  $\alpha_n = d \ln n_0(x) / dx = L_n^{-1}$ ,  $L_n = n_0 / (dn_0 / dx)$  – характерный размер неоднородности равновесной плотности плазмы,  $\rho_0^2 = V_{Te}^2 / \omega_{Bi}^2$  – квадрат ионного гирорадиуса по электронной температуре;  $V_{T*} = -(cT_e / (eB_0)) \alpha_T$ ,  $\alpha_T = d \ln T_e(x) / dx = L_T^{-1}$ ,  $L_T$  – характерный размер неоднородности равновесной температуры плазмы,  $\sigma = T_i / T_e$ .

Уравнение (8) содержит два качественно различных нелинейных слагаемых: первое  $-\partial \varphi^2 / \partial y$  – скалярная (типа Кортевега-де Вриза (КДВ)) и второе  $-\partial \varphi / \partial x \cdot \partial / \partial y (\rho_i^2 \Delta^2 \varphi - \Delta \varphi) - \partial \varphi / \partial y \cdot \partial / \partial x (\rho_i^2 \Delta^2 \varphi - \Delta \varphi)$  векторная (типа якобиана) нелинейность, соответственно. Это нелинейное уравнение описывает динамику длинноволновых дрейфовых волн в вязкой магнитоактивной плазме и является обобщением уравнения Хасегавы – Мимы (ОУХМ) и отличается от последнего наличием скалярной нелинейности (последний член в левой части), силы трения и столкновительной и магнитной вязкости. Аналогичное уравнение получается и для волн Россби в геофизической гидродинамике, называемое обобщенным уравнением Чарни-Обухова (ОУЧО) [15.16]. Сила трения характеризуется первым членом правой части в (8), магнитная вязкость учитывается членом  $\rho_0^2 \rho_i^2 d / dt (\Delta^2 \varphi / 2)$ , а столкновительная вязкость – выражением  $\eta_1 \Delta^2 \varphi / n_0$ .

Заметим, что учет конечной температуры ионов и, соответственно, эффекта ненулевого ларморовского радиуса ионов в дрейфовых колебаниях и построение уравнения типа (8) можно провести также на основе гидродинамики Греда, как это сделано в статье [17]. В этой работе получена самосогласованная нелинейная (с векторной нелинейностью) система из трех уравнений эволюционного типа для возмущения плотности, давления и температуры, описывающая динамику нелинейных ионно-дрейфовых структур в замагниченной плазме.

### 3. Временные и пространственные характеристики дрейфовых структур

#### 3.1. Спектры линейных дрейфовых волн

Анализ решений динамического уравнения (8) начнем с линейной стадии эволюции волнового возмущения. С этой целью пренебрежем нелинейными членами в уравнении (8). Далее, в рамках локального приближения, когда коэффициенты уравнения (8) можно считать локально-постоянными, для плоских возмущений вида  $\varphi \sim \exp\{i(k_x x + k_y y - \omega t)\}$  (где  $\omega = \omega_0 + i\gamma$ ,  $\gamma < \omega_0$ ), получаем дисперсионное уравнение для собственной частоты  $\omega_0$ ,

$$\frac{\omega_0}{k_y} = \frac{V_{*e}}{1 + k^2 \rho_0^2 (1 + \sigma k^2 \rho_0^2 / 2)}, \quad (9)$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , и декремента затухания длинных дрейфовых волн в рассматриваемой диссипативной плазме

$$\gamma = -\left( v_{in} + 0.3 v_{in} k^2 \rho_i^2 \right) \frac{k^2 \rho_0^2}{1 + k^2 \rho_0^2 (1 + \sigma k^2 \rho_0^2 / 2)}. \quad (10)$$

Полученные выражения для частоты (9) и декремента затухания (10) учитывают эффект конечного ларморовского радиуса ионов ( $k^2 \rho_i^2 \neq 0$ ), что заметно расширяет спектры обычных линейных дрейфовых волн.

Из (9) видно, что линейные длинные дрейфовые волны обладают отрицательной дисперсией: с увеличением волнового вектора уменьшается фазовая скорость волны.

### 3.2. Точные стационарные решения нелинейного уравнения

В общем случае коэффициенты в уравнении (8) не постоянны, так как равновесная температура  $T_e$  и плотность  $n_0$  среды зависят от поперечной (по отношению внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ) координаты  $x$ . Поэтому, как это видно из дисперсионного уравнения (10), максимальная фазовая скорость волн, или так называемая дрейфовая скорость  $V_{*e}(x)$  зависит от поперечной координаты  $x$ . Это явление называется “твистингом” [18,19]. Для того чтобы нелинейное уравнение (8) обладало регулярным, сильнолокализованным солитонным (вихревым) решением, необходимо, чтобы эта нелинейная структура распространялась со скоростью вне диапазона скорости линейных волн. Иначе солитон будет находиться в черенковском резонансе с линейными волнами и будет терять энергию на их излучение, т.е. не будет долгоживущей структурой. Это значит, что скорость нелинейной структуры  $U$  должна превосходить предельную скорость линейных дрейфовых волн  $V_{*e}$ . Так что соотношение  $|U| > |V_{*e}|$  является условием существования рассматриваемых уединенных нелинейных структур.

С другой стороны, из сравнения инерционного и нелинейно-конвективного членов уравнения (8) следует, что скорость вращения захваченных волной частиц  $U_{rot}$  удовлетворяет условию  $U_{rot} > U$ . Таким образом, окончательно приходим к условию [19,20]:

$$|U_{rot}| > 4 \left( 1 - \frac{d \ln T_e}{d \ln n_0} \right) |V_{*e}(\theta)|. \quad (11)$$

На динамику нелинейных уединенных структур, удовлетворяющих этому условию, непостоянство коэффициентов в уравнении (8) не влияет, и оно считается уравнением с постоянными коэффициентами (значения  $T_e$  и  $n_0$  берутся при  $x = 0$ ). Итак, характерная скорость вращения структуры должна в несколько раз превышать дрейфовую скорость  $V_{*e}(\theta)$  и скорость перемещения структуры, как целого  $U$ . Это условие называется антитвистинговым. Но, если скорость вращения в каком-либо месте на профиле структуры превышает скорость перемещения структуры как целой, то линии тока таких структур образуют сепаратрису, внутри которой линии тока замкнуты. Такие структуры являются носителями ненулевой завихренности, а также переносят и захваченные частицы среды [9,10,21,22], т.е. являются вихрями.

Далее с учетом соотношения  $U_{rot} \equiv V^E \sim e/(M\omega_{ce}) \cdot \bar{\varphi} / L$ , которое определяет связь между амплитудой структуры  $\bar{\varphi}$ , ее характерным размером  $L$  и характерной скоростью вращения захваченных частиц в структуре, из (11) видно, что антитвистинговое условие означает

$$\frac{e\bar{\varphi}}{T_e} \gg \frac{L}{L_n} \quad (12)$$

Дрейфовые возмущения, амплитуды, размеры которых удовлетворяет условию (12), могут формировать сильную дрейфовую турбулентность в плазменной среде [9,10, 23].

Присутствие скалярной нелинейности (или нелинейности типа Кортевега де Вриза), а также магнитной вязкости, придает ОУХМ новые свойства по сравнению с обычным уравнением Хасегавы – Мимы (ХМ) (в котором содержится лишь векторная нелинейность).

В частности, появляется возможность существования монопольных уединенных нелинейных дрейфовых структур-вихрей и их циклон-антициклонной асимметрии.

При выполнении условий (11) и (12) в бездиссипативной плазме ( $\nu_m, \eta_I = 0$ ), нелинейное динамическое уравнение (8) допускает существование стационарного локализованного вихревого решения. Предполагая, что потенциал стационарного колебания  $\varphi_0$  зависит от переменных  $x$  и  $\eta = y - Ut$  (где  $U$  – постоянная скорость распространения волны вдоль оси  $y$ ), т.е.  $\varphi_0 = \varphi_0(x, \eta)$ , из (8) получаем следующее уравнение для потенциала волны:

$$\hat{D} \left[ \frac{\rho_i^2}{2} \Delta^2 \varphi_0 - \Delta \varphi_0 + \Lambda \varphi_0 - S \varphi_0^2 + f(x) \right] = 0. \quad (13)$$

Здесь  $f(x)$  пока произвольная функция координаты  $x$ ,

$$\Lambda = \left( 1 - \frac{V_{*e}}{U} \right) \frac{1}{\rho_0^2}, \quad S = \frac{e}{2T_e \rho_0^2} \frac{V_{*e}}{U}, \quad (14)$$

а оператор  $\hat{D}$  определен соотношением

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{c}{UB_0} [\nabla \varphi_0 \times \nabla]_z. \quad (15)$$

Тогда, посредством векторного интегрирования, решение сложного нелинейного уравнения в частных производных (8), (13) сводится к решению относительно более простого нелинейного уравнения четвертого порядка [10]:

$$\frac{\rho_i^2}{2} \Delta^2 \varphi_0 - \Delta \varphi_0 + \Lambda \varphi_0 - S \varphi_0^2 + f(x) = G \left( \varphi_0 - \frac{UB_0}{c} x \right). \quad (16)$$

Здесь  $G(\chi)$  произвольная функция своего аргумента  $\chi$ . Равенство (16) справедливо во всем пространстве за исключением, быть может, особой линии, которая задается уравнением

$$\varphi_0 - \frac{U \cdot B_0}{c} \cdot x = const, \quad (17)$$

т.е. уравнением изолинии функции тока  $\varphi_0 - (UB_0/c)x$  в системе координат, движущейся вместе с нелинейной структурой.

Наибольший интерес с физической точки зрения представляют пространственно-локализованные решения, такие, как  $\varphi_0 \rightarrow 0$  при  $r = (x^2 + \eta^2)^{1/2} \rightarrow \infty$  (вихревые структуры). Такие решения лишь в том случае, если асимптотика произвольной функции  $G$  в (16) дается соотношением

$$G(x) \Big|_{\varphi_0 \rightarrow 0} \rightarrow f(x). \quad (18)$$

Различаем ситуацию, когда  $G$  терпит разрыв на некоторой линии или поверхности и альтернативный случай, когда  $G$  является непрерывной функцией своего аргумента. В данной работе мы ограничимся первым случаем, а второй случай будет рассмотрен в следующей отдельной работе.

Сейчас коротко обсудим вопрос о полярности нелинейных структур, описываемых уравнением (8), т.е. выясним, уединенные структуры являются циклонами или антициклонами. В отличие от обычного уравнения ХМ (которое симметрично при преобразовании циклона в антициклон:  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow y$ ,  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ), ОУХМ (8) не обладает циклон-антициклонной симметрией и характеризуется совершенно иной симметрией:  $\varphi(-\alpha; x, y, t) \rightarrow -\varphi(\alpha; -x, y, t)$ . Выясним, в чью пользу оказывается возникающая асимметрия.

Из (8) видно, что нелинейная фазовая скорость длинных дрейфовых волн (т.е. характерный размер которых удовлетворяет условию, обратного (20))  $U$  выражается формулой:

$$U = V_{*e} \left( 1 - \frac{d \ln T_e}{d \ln n_0} \varphi \right), \quad (19)$$

Как уже отмечалось выше, удлиненная структура должна иметь скорость превышающую  $V_{*e}$ . Из (19) видно, что в нормальном режиме плазмы (в котором равновесная плотность плазмы и электронная температура спадают к периферии), т.е. когда  $d \ln T_e / d \ln n_0 > 0$  (в частности, в магнитных ловушках различных типов, включая токамаки), долгоживущая удлиненная структура в плазме с неоднородной температурой ( $d \ln T_e / dx \neq 0$ ) возможна только при  $\varphi < 0$ , т.е. как циклон. Можно полагать, что данное утверждение, в силу аналогии уравнений для вихрей Россби в гидродинамике и дрейфовых вихрей в плазме, хорошо согласуется с результатами экспериментального наблюдения группы Незлина [21,19], в которых утверждается, что во вращающемся параболическом сосуде с жидкостью (аналог пространственно-неоднородной плазменной среды) наблюдалась генерация преимущественно циклонических структур. Тут же следует отметить, что это не противоречит тому факту, что при постоянной толщине мелкой воды удлиненные вихри Россби являются только антициклонами [19].

### 3.2.1. Стационарные дрейфовые дипольные вихри

Рассмотрим возможность существования в плазменной среде относительно мелкомасштабных двумерных структур, когда в уравнении (8) векторная нелинейность преобладает над скалярной, т.е. когда характерный размер структур  $d$  удовлетворяет условию:

$$d < (\rho_0^2 L_T)^{1/3}. \quad (20)$$

При условиях (20), в исходных уравнениях (8) и (16) членом скалярной нелинейности можно пренебрегать ( $S \rightarrow 0$ ).

В этом случае, в качестве примера разрывной функции  $G$  в (16) возьмем, в соответствии с работой Абурджания (2006), кусочно-линейную функцию:

$$G(x) = C \cdot x, \quad (21)$$

где  $C$  – некоторая произвольная константа, которая принимает разные значения в различных областях пространства и определяется из граничных условий. При этом, из (16) с учетом (18) получаем уравнение для безразмерного потенциала:

$$\frac{\sigma}{2} \Delta^2 \psi - \Delta \psi + \Lambda \psi = C(\psi - Ux). \quad (22)$$

Описываемые уравнением (22) нелинейные структуры будем называть векторными вихрями или дрейфовыми дипольными вихрями.

При дальнейшем анализе, наряду с декартовыми координатами  $x, \eta$ , используем полярные координаты  $r = (x^2 + \eta^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \arctan(\eta/x)$ . Вводим представление о внешней и внутренней областях вихря, полагая что области разделены друг от друга некоторой замкнутой кривой  $r = r(\theta) \equiv r_0$ .

Далее, для определенности, будем предполагать, что константа  $C$  принимает различные значения во внешней ( $C_1 = 0$ , при  $r > r_0$ ) и внутренней ( $C_2 = \text{const} \neq 0$  при  $r < r_0$ ) областях. Следуя работе [24], находим решения уравнения (22) в обеих областях и, затем проводим их сшивку на особой кривой  $r = r_0$ . При этом считается, что на этой кривой потенциал  $\varphi_0$  и его производная по нормали  $\mathbf{n}$  к границе между областями ( $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi_0$ ) и  $\Delta \varphi_0$  непрерывны. Тогда

стационарное решение нелинейного уравнения (8) совпадает с частным решением линейного уравнения (22), и (с безразмерными переменными и параметрами) имеет вид дипольного вихря, движущегося по оси  $y$  со скоростью  $U$ :

$$\psi(r, \theta) = \Psi(r) \cos \theta. \quad (23)$$

Во внешней области ( $r \geq r_0$ )

$$\Psi(r) = \Psi(r_0) \left[ A_1 \frac{K_1(\beta_1 r)}{K_1(\beta_1 r_0)} + A_2 \frac{K_1(\beta_2 r)}{K_1(\beta_2 r_0)} \right], \quad (24)$$

где  $K_1$  – функция Макдональда первого рода,  $\Psi(r_0) = r_0 U$  – значение  $\Psi(r)$  (безразмерное) на особой кривой  $r = r_0$ . Безразмерные параметры  $\beta_{1,2}$  – показатели спада потенциала во внешней области, которые определяются из характеристического уравнения

$$\frac{\sigma}{2} \beta^4 - \beta^2 + \Lambda = 0, \quad (25)$$

и соответственно вычисляются по формуле

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{1}{\sigma} \left[ \Lambda \pm (\Lambda - 2\sigma\Lambda)^{1/2} \right] \quad (26)$$

Предполагается, что  $2\sigma\Lambda < \Lambda$  и  $\Lambda > 0$ . Последнее неравенство, согласно (14), означает, что структуры могут перемещаться со скоростью  $U < 0$  и/или  $U > V_{*0}$ .

Аналогично, во внутренней области ( $r < r_0$ ) имеем:

$$\Psi(r) = \Psi(r_0) \left[ \frac{\mu_1 r}{\mu r_0} + c_1 \frac{J_1(\gamma r)}{J_1(\gamma r_0)} + c_2 \frac{I_1(\nu r)}{I_1(\nu r_0)} \right], \quad (27)$$

где  $J_1$ ,  $I_1$  – функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя, соответственно;

$$\mu = \mu_1 - 2\Lambda/\sigma, \quad (28)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{\sigma} \left[ (1 + \mu\sigma^2)^2 - 1 \right], \quad (29)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{\sigma} \left[ (1 + \mu\sigma) + 1 \right] \quad (30)$$

Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  и  $\mu_1$  находятся из условия непрерывности потенциала и его первых и вторых производных на особой кривой  $r = a$  и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\beta_2^2}{\delta} \left[ L(\nu^2 - \beta_2^2) + H(\beta_2^2 + \gamma^2) + B_2(\nu^2 + \nu^2) \right] \\ A_2 &= -\frac{\beta_1^2}{\delta} \left[ L(\nu^2 - \beta_1^2) + H(\beta_1^2 + \gamma^2) + B_1(\nu^2 + \nu^2) \right] \\ c_1 &= -\frac{2\Lambda}{\mu\rho^2} \frac{\nu^2}{\delta} \left[ B_1(\beta_1^2 + \gamma^2) - B_2(\nu^2 + \beta_2^2) + L(\beta_1^2 - \beta_2^2) \right] \\ c_2 &= \frac{2\Lambda}{\mu\rho^2} \frac{\gamma^2}{\delta} \left[ B_1(\beta_1^2 - \nu^2) - B_2(\beta_2^2 - \nu^2) + H(\beta_1^2 - \beta_2^2) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta &= (\beta_2^2 - \beta_1^2)(h + l) + (\nu^2 + \gamma^2)(b_2 - b_1), \quad b_i = \beta_i K_2(\beta_i) / K_1(\beta_i), \quad B_i = b_i / \beta_i^2, \\ i &= 1, 2; \quad h = \gamma J_2(\gamma) / J_1(\gamma), \quad l = \nu I_2(\nu) / I_1(\nu), \quad H = h / \gamma^2, \quad L = l / \nu^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Учет непрерывности третьих производных потенциала дает условия сшивки параметров вихря:

$$\begin{aligned} (B_1 B_2 + LH)(\gamma^2 + \nu^2)(\beta_2^2 - \beta_1^2) - (HB_2 - LB_1)(\gamma^2 + \beta_2^2)(\nu^2 - \beta_1^2) + \\ + (LB_2 + HB_1)(\beta_2^2 - \nu^2)(\beta_1^2 + \gamma^2) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и параметры:



$$\psi \rightarrow e\phi/T_e, \quad r \rightarrow r/\rho_0, \quad t \rightarrow t \cdot \omega_{B1}, \quad U \rightarrow U/V_{Te}, \quad \Lambda \rightarrow I + \alpha_n/U.$$

$$\alpha_n \rightarrow \alpha_n \rho_0, \quad \alpha_T \rightarrow \alpha_T \rho_0, \quad v_m \rightarrow v_m/\omega_{B1}, \quad v_{ii} \rightarrow v_{ii}/\omega_{B1}. \quad (34)$$

Учитывая соотношения (26), (28)-(31) и (32) заключаем, что уравнение (33) можно рассматривать как выражение для  $\mu_i$  и как функцию параметров плазмы  $\rho_i$ ,  $\rho_0$ ,  $V_e$  и волны  $r_0$ ,  $U$ . Зная значения  $\mu_i$  полностью определяем пространственную структуру вихря. Вихрь характеризуется двумя параметрами  $r_0$  и  $U$ . Заметим, что решение (23)-(33) имеет более высокую степень гладкости, чем ранее изученные вихревые структуры. Требования непрерывности накладывались на  $\psi$ ,  $\nabla\psi$ ,  $\Delta\psi$  и  $\nabla\Delta\psi$ . При указанном выборе параметров, для рассматриваемых волновых структур, непрерывным оказывается также и  $\Delta^2\psi$  при  $r = r_0$ . На бесконечности потенциал структуры спадает по закону  $r^{-1/2} \exp(-\beta r)$ , т.е. сильно локализован в пространстве.

Таким образом, построенное решение (24), (27) является сильно локализованным, уединенным вихревым образованием в пространстве и по структуре заметно отличается от дипольного вихря типа Ларичева – Резника, который, в конечном счете, является решением линейного уравнения второго порядка [25,14]. Это обусловлено тем, что мы учли безстолкнительную магнитную вязкость плазмы ( $\rho_i \neq 0$ ), что и приводит к вышеотмеченному уравнению четвертого порядка (22). Нелинейная структура представляет собой пару уединенных вихрей циклон-антициклонного типа, содержащих и переносящих захваченные частицы среды, вращающиеся в противоположные направления и, перемещающиеся поперек направления неоднородности среды (вдоль оси  $y$ ) (см. рис. 1).

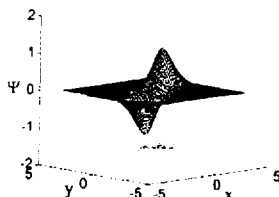


Рис.1. Стационарное дипольное вихревое решение уравнения (8) или (П1.1).  
Рельеф и линии уровня вихря для значения параметров:  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0.4$ ,  
 $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ .  $\psi_{\max} = 1.122$ ,  $\psi_{\min} = -1.122$ .

Следует отметить, что уравнение четвертого порядка аналогичное (22) и, соответственно, аналогичное его решение вида (24), и значение параметров (25)-(33) приведены также в статье [26]. В отличие от данной работы, где мы изучаем электростатические дрейфовые волны (однопотенциальные структуры), в [26] изучаются электромагнитные (т.н. двупотенциальные структуры). Именно двупотенциальностью обусловлено появление уравнения четвертого порядка (26) в работе [26], а в нашем случае, аналогичное уравнение (22) порождено магнитной вязкостью среды.

#### 4. Результаты численного эксперимента

Численное решение начально-граничной задачи для нелинейного нестационарного обобщенного уравнения Хасегавы-Мимы (8) (или, в безразмерном виде, П1.1), было нами проведено с помощью изложенной в приложениях 1 и 2 неявной конечно-разностной схемой. Расчеты проводились на сетке  $200 \times 200$  по  $x$  и  $y$ , соответственно. Пространственный шаг сетки составлял  $h = 0.1$ , шаг по времени  $\tau = 0.004$ . Правильность

счета и устойчивость предлагаемой схемы контролировались на модельных задачах, а также с помощью закона сохранения массы структуры  $M = \int \Psi dx d\eta$  и энергии возмущения (38). Масса и энергия сохранялись с точностью до  $10^{-2}$ .

Для ясности заметим, что в уравнение П1.1 параметр  $a$  характеризует размер структуры,  $b_1$  – дисперсию среды,  $b_2$  – векторную нелинейность,  $\alpha$  – скалярную нелинейность,  $b_3$  и  $b_4$  – вязкостную и столкновительную диссипацию среды, соответственно.

#### 4.1. Расщепление дипольного вихря на монополярные

Рассмотрим эволюцию собственного дипольного решения (23) в рамках уравнения (8) (или (П1.1)), при отсутствии диссипативных процессов ( $b_3 = b_4 = 0$ ; см. приложение 1), для различного значения параметров среды и нелинейной структуры. Так, что начальным условием  $\psi(x, y, 0)$  для задачи Коши (8), (П1.1) выберем дипольный вихрь (23) (рис.1).

Анализ начнем с простого, линейного случая взаимодействия уединенной вихревой структуры с плазменной средой и выявим роль эффекта дисперсии среды в процессах эволюции начального возмущения в рамках уравнения (8) (или П1.1). Для этого предположим, что в среде отсутствуют нелинейные и диссипативные эффекты ( $\alpha = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ ). Такая начальная задача может возникнуть, например, в случае внешнего импульсного воздействия на лабораторную плазму при ее дополнительном высокочастотном или пучковом нагреве [27,28] или в ионосферно-магнитосферной плазме во время магнитных штормов, землетрясений, ядерных или промышленных взрывов [29-32] и др. В этих случаях, в соответствующем месте плазменной среды может генерироваться уединенный вихрь, который в начальной стадии будет эволюционировать в рамках линейного варианта уравнения (8), пока соответствующие неустойчивости не разовьют нелинейные взаимодействия волновых мод между собой и со средой. Так что, при расчетах в уравнении П1.1, для коэффициентов подбирались значения:  $a = 0.2439$ ,  $\alpha = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ , а коэффициент дисперсии постепенно увеличивался  $b_1 = 0.5; 1; -2; 5$ .

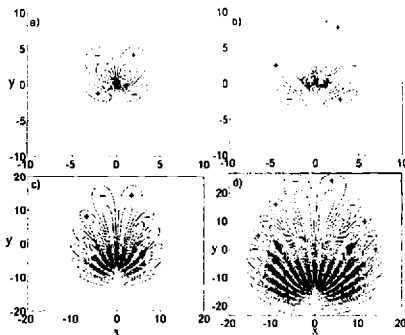


Рис. 2. Линейное дисперсионное распыление начального дипольного вихря (линий уровня):  
 а).  $t = 5$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.981$ ,  $\psi_{\min} = -0.981$ ;  
 б).  $t = 10$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.686$ ,  $\psi_{\min} = -0.686$ ;  
 в).  $t = 25$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.345$ ,  $\psi_{\min} = -0.345$ ;  
 г).  $t = 40$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.232$ ,  $\psi_{\min} = -0.232$ .

Как видно из рисунков, от начального уединенного дипольного вихря (см. рис. 1) со временем отделилось несколько монополярных (циклонических и антициклонических)

вихрей, локализованных на относительно небольшой площади. Первоначальный дипольный вихрь (рис. 2а), представленный правильными concentрическими окружностями, деформировался: правее и левее от основного вихря в плотной упаковке симметрично образуются новые дипольные вихри (связанные циклон-антициклонические структуры), амплитуда которых меньше, чем амплитуда основного вихря. Вся вихревая картина имеет ось симметрии, практически совпадающую с центром основного возмущения. При  $t = 10$  (рис. 2б) в поле потенциала  $\psi(x, y, t)$  отчетливо проявилась еще одна особенность, которая уже намечалась в предыдущей картине поля (при  $t = 5$ ) – меридиональная (вдоль оси  $y$ ) направленность полос повышенного и пониженного значений потенциала (или вытянутость нового циклона и антициклона). При удалении от основного возмущения, эти полосы (новые структуры) относительно оси симметрии постепенно наклоняются направо и налево, соответственно. Причем наклон неравномерный, он увеличивается по мере удаления от оси симметрии. Внутри полос располагаются вытянутые вдоль оси  $y$  вихри соответствующих знаков (циклон или антициклон) примерно одинаковой амплитуды. С увеличением величины коэффициента дисперсии  $b_1$ , ускоряется процесс эволюции начального возмущения, а для заданного значения  $b_1$  со временем увеличивается число полос, уменьшаются амплитуды структур в них, в полосах происходит разрыв отдельных структур на более мелкие структуры (по-видимому, из-за этого и увеличивается число полос), и в конечном счете во всей области взаимодействия формируется мелкомасштабное (коротковолновое) фоновое излучение (рис. 2в, 2г).

В данной модели нет нелинейного взаимодействия мод, отсутствуют и диссипативные эффекты, поэтому вся динамика вихревого поля определяется дисперсией волн. Однако описанные выше качественные эффекты должны присутствовать и в реальной плазменной среде. Действительно, подключение нелинейных процессов обоих видов  $\alpha \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$  и диссипативных эффектов  $b_3 \neq 0$ ,  $b_4 \neq 0$ , если эти коэффициенты существенно не превышают величину  $b_1$ , картина эволюции качественно не изменяется (см. ниже).

При  $\alpha = 0$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$  (когда отсутствуют скалярная нелинейность и диссипативные эффекты) и  $b_2 \sim b_1 \neq 0$  (т.е. при действии векторной нелинейности и дисперсии) первоначальная дипольная структура со временем практически не меняется и сохраняет свою форму стационарно до  $t = 50$ , т.е. выражение (23) на самом деле является стационарным решением уравнения (8) при  $\alpha = b_3 = b_4 = 0$ . Структура лишь перемещается как целое, с постоянной скоростью  $U = U/V_{Te} \approx 1.2$  вдоль оси  $y$  (рисунки не приводятся). В этом случае локализация-самоорганизация вихревой структуры обусловливается балансом между дисперсией и векторной нелинейностью. Эта версия уравнения (8) (когда  $\alpha = b_3 = b_4 = 0$ ) не предсказывает существование стационарных monopольных уединенных вихрей. Нестационарность дипольного решения (в рамках уравнений (8) или (III.1)) проявляется лишь при воздействии на него скалярной нелинейности ( $\alpha \neq 0$ ) и диссипативных эффектов ( $b_3 \neq 0$ ,  $b_4 \neq 0$ ).

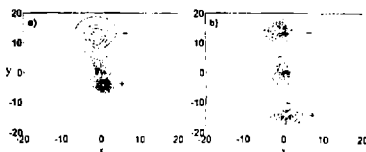


Рис. 3. Расщепление дипольного вихря на monopольные (циклон, антициклон) из-за действия скалярной нелинейности при отсутствии векторной нелинейности. Линии уровня при:

- а).  $t = 10$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 5$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 1.284$ ,  $\psi_{\min} = -0.501$ ;  
 б).  $t = 8$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.909$ ,  $\psi_{\min} = -0.907$ .

Мы исследовали динамику дипольного вихря (23) для различных значений параметра скалярной нелинейности  $\alpha$ , в частности, для  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 1$  и т.д. и получили практически одинаковые результаты, лишь с той разницей, что при  $\alpha = 0.1$  процесс эволюции в 10 раз длиннее, чем при  $\alpha = 1$ . При отсутствии векторной нелинейности ( $b_2 = 0$ , т.е., когда рассматриваются относительно крупномасштабные структуры, удовлетворяющие условию, обратного (20) (см. разд. 3.2.1)), заметное изменение начальной структуры проявляется после достаточно длинного промежутка времени. Мы провели численный расчет линии уровня  $\psi(x, y, t) = const$  до момента времени  $t = 50$  для параметров  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0.2$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $b_3 = b_4 = 0$ . Выявилось, что при  $t = 50$  первоначальный дипольный вихрь расщепляется на достаточно изолированные две монополи, и их форма приближается к круговой (зарождаются еще две монополи приблизительно круговой формы). Антициклон является более локализованным, а циклон менее локализованным и более широким. Для ускорения процесса расщепления был рассмотрен случай, когда  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 5$ ,  $b_3 = b_4 = 0$  (т.е. пятикратно увеличили коэффициенты дисперсионного члена и скалярной нелинейности). Для таких параметров результат эволюции вихрей при  $t = 10$  аналогичен предыдущему случаю (при  $t = 50$ ) (рис.3а). Так, что с увеличением значения параметра скалярной нелинейности  $\alpha$ , ускоряется процесс расщепления дипольного вихря (при отсутствии векторной нелинейности), а дисперсионное расплывание немного уменьшается. Действие скалярной нелинейности подобно введению силы, пропорциональной  $\psi$ , которая создает противоположно направленные дрейфы циклона и антициклона и разводит эту пару (см. ниже).

Следует заметить, что в случае слабой дисперсии ( $b_1 \rightarrow 0$ ) процесс расщепления дипольных структур происходит симметрично – образовавшиеся монополярные структуры (циклоны, антициклоны) имеют одинаковые амплитуды, размеры и формы (рис. 3б). Таким образом, дисперсионные эффекты вносят анизотропию в процессы эволюции начального возмущения в диспергирующих средах – образовавшиеся циклоны и антициклоны имеют разные амплитуды и характерные размеры.

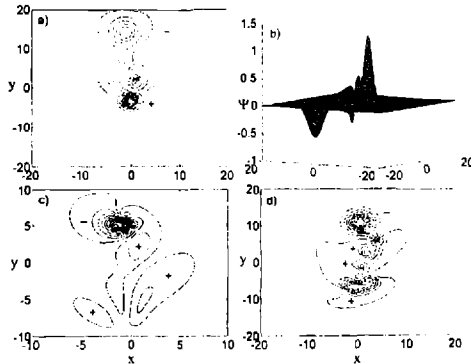


Рис.4. Расщепление дипольного вихря при воздействии нелинейностей обоих типов. Линии уровня при:

- а).  $t = 5$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 1.252$ ,  $\psi_{\min} = -0.664$ ;  
 б).  $t = 5$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 1.252$ ,  $\psi_{\min} = -0.664$ ;  
 в).  $t = 1$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 7$ ,  $b_2 = 10$ ,  $\alpha = 5$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.401$ ,  $\psi_{\min} = -1.674$ ;  
 г).  $t = 5$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 5$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.664$ ,  $\psi_{\min} = -0.992$ .

Как отмечалось выше и в предыдущем разделе, скалярная нелинейность типа КДВ не может быть той единственной нелинейностью (как это предполагалось ранее, и как это имеет место в обычных солитонах типа КДВ [33,34]), которая может находиться в равновесии с дисперсией и обеспечивает формирование уединенных дрейфовых вихрей. Помимо скалярной нелинейности, принципиально важную роль в рассматриваемом дисперсионно-нелинейном равновесии должна играть и векторная нелинейность. Для выяснения относительной роли этих двух нелинейностей в процессе эволюции дипольного вихря в бездиссипативной плазме, рассмотрим случай, когда  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = b_4 = 0$ . Так как скалярная нелинейность опять доминирует, то имеет место расщепление начального диполя на отдельные монополи. Причем, антициклон является более локализованной структурой, чем циклон, и его амплитуда в два раза больше, чем амплитуда циклона (рис. 4а,б). Это означает, что в присутствии диссипативных процессов более долгоживущими окажутся циклоны (т. к. диссипативные эффекты пропорциональны  $\sim |\nabla\psi|$ ,  $\Delta\psi$  или  $\Delta^2\psi$ ). С увеличением параметра  $b_2$ , амплитуда антициклона уменьшается и разрушается на более мелкие, слабые антициклоны и волновой фон, а амплитуда циклона увеличивается (в четыре раза) и он становится сильно локализованным (рис. 4в).

Видно, что если при данном размере структуры ее амплитуда слишком велика, т. е. когда скалярная нелинейность ( $\sim \alpha$ ) заметно преобладает над дисперсией ( $\sim b_1$ ), то недостающая дисперсионная компенсация нелинейности типа КДВ (для формирования циклонической структуры) обеспечивается векторной нелинейностью, которая и предотвращает рассматриваемую структуру от неограниченного нелинейного укрупнения (рис. 4в). В этом случае векторная нелинейность работает против скалярной. В другом случае, когда при данном размере структуры ее амплитуда оказывается слишком малой, так что дисперсия преобладает над скалярной нелинейностью, недокомпенсация дисперсии скалярной нелинейностью покрывается векторной нелинейностью. В этом случае векторная нелинейность работает заодно со скалярной (рис. 4г). Таким образом, можно утверждать, что при эволюции начального возмущения в рамках ОУХМ (ОУЧО) (8), векторная нелинейность выполняет двойную роль и в обоих случаях, в конечном счете содействует формированию уединенной нелинейной вихревой структуры в среде. Аналогичная точка зрения высказывалась также в работе [19].

Заметим, что увеличение коэффициента скалярной нелинейности  $\alpha$  мешает сильной локализации циклонической структуры и содействует локализации антициклона, т.е. в реальной, диссипативной плазменной среде более крупномасштабные первоначальные дипольные структуры при эволюции преимущественно порождают долгоживущие монополи циклонической поляризации.

Для теоретической интерпретации полученного здесь результата проведем некоторые аналитические вычисления. Монополюсные круглые структуры (циклоны или антициклоны) описываются стационарными аксиально-симметричными решениями уравнения (8). Для таких решений нелинейный член в (8), в виде якобьяна, зануляется, и формирование структур обуславливаются балансом дисперсии и скалярной нелинейностью. С помощью уравнения (19) находим, что антициклоны ( $\psi_m^+ > 0$ , где  $\psi_m$  – амплитуда нелинейной структуры) перемещаются со скоростью

$$U = V_{*e} - \alpha |\psi_m^+|, \quad (35)$$

а циклоны ( $\psi_m^- < 0$ ) движутся со скоростью

$$U = V_{*e} + \alpha |\psi_m^-|. \quad (36)$$

Так, что антициклоны и циклоны перемещаются с разными скоростями, и относительная скорость равна  $\Delta U = \alpha (|\psi_m^+| + |\psi_m^-|)$ . Этот результат четко объясняет, почему дипольные

вихри расщепляются на две изолированные монополи с разными знаками завихренности, т.е. на отдельные циклоны и антициклоны. Согласно (35), антициклоны могут формироваться, если их скорость перемещения  $U < 0$  (см. разд. 3.2.1), т.е. для его существования необходима значительно высокая амплитуда  $|\psi_m^*| > V_{*e} / \alpha$ , а для циклона такой порог отсутствует. Поэтому, в нормальном режиме плазмы (когда  $d \ln T_e / d \ln n_0 > 0$ ), более легко могут генерироваться циклонические структуры. Характерное время расщепления дипольных вихрей  $t_0$  можно оценить из исходного динамического уравнения (8):

$$t_0 \sim \frac{r_0}{|e \psi_m / T_e \mathcal{V}_{T*}|} \quad (37)$$

Именно такая зависимость и наблюдается в наших вычислениях.

#### 4.2. Особенности эволюции нелинейных структур в диссипативной плазме

Рассмотрим эволюцию дипольных вихревых структур, построенных в разделе 3, под влиянием диссипативных процессов. В качестве диссипации в динамическом уравнении (8) нами были учтены силы трения, магнитная и столкновительная вязкость. При этом, согласно уравнению (8), масса  $M = \int \mathcal{V} dx d\eta$  структуры сохраняется, а энергия  $E$  и энтропия  $K$  возмущений не сохраняются и меняются со временем по закону:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int [v_{in} (\nabla \psi)^2 + 0.3 \sigma v_{ii} (\Delta \psi)^2] dx dy, \quad (38)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = - \int [v_{in} (\Delta_{\perp} \psi)^2 + 0.3 \sigma v_{ii} (\nabla (\Delta_{\perp} \psi))^2] dx dy, \quad (39)$$

где

$$E = \frac{1}{2} \int [(\psi)^2 + (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\Delta_{\perp} \psi)^2] dx dy, \quad (40)$$

– энергия вихря;

$$K = \frac{1}{2} \int [(\nabla \psi)^2 + (\Delta \psi)^2 + \frac{1}{2} \sigma (\nabla (\Delta_{\perp} \psi))^2] dx dy, \quad (41)$$

– энтропия вихря.

Заметим, что в предположении малости диссипации в (38) и в (39) можно подставить выражение для  $\varphi_0$  (для определенности, в качестве  $\varphi_0$  можно взять стационарное решение (23) - (33)), считая параметры вихря  $r_0$  и  $U$  медленными функциями времени, что даст возможность проследить за качественной картиной эволюций вихревых структур в среде в нестационарном режиме, как это проведено в работе [14] для столкновительной (но невязкой) плазмы. В отличие от последней работы, в данной работе мы исследуем релаксацию дрейфовых вихревых структур в вязкой столкновительной плазме на основе прямого численного решения динамического уравнения (8), (П1.1).

Из уравнения (38) сразу следует, что  $dE(t)/dt \leq 0$ . При этом, так как  $dE/dt$  тождественно не равно нулю, видно что энергия волнового возмущения со временем уменьшается из-за диссипативных процессов. Таким же образом уменьшается и энтропия вихревой структуры (39). То есть, происходит релаксация вихревого возмущения.

Характерное время релаксации вихря  $t_c$  можно оценить на основе уравнений (38) – (41). С этой целью оценим порядок интегралов, входящих в выражения для энергии и энтропии,

$$|\nabla \psi|^2 dr \sim \frac{1}{d^2} |\psi|^2 dr, \quad |\Delta \psi|^2 dr \sim \frac{1}{d^4} |\psi|^2 dr, \quad |\nabla (\Delta \psi)|^2 dr \sim \frac{1}{d^6} |\psi|^2 dr, \quad (42)$$

где  $d$  – характерный размер вихря. С помощью (42) из (38) и (39) получаем выражение для характерного времени релаксации (в размерных величинах):

$$t_c = \frac{d^2}{2\rho_0^2} \frac{1 + \rho_0^2 / d^2}{v_{in} + 0.3v_{in}\rho_i^2 / d^2}. \quad (43)$$

Видно, что влияние столкновительной вязкости на затухание мелкомасштабного вихря ( $\rho_i^2 / d^2 > v_{in} / v_{ii}$ ) сильнее, чем влияние силы трения.

Из (43) следует также, что в слабоионизированной плазме,  $v_{in} \gg 0.3v_{in}\rho_i^2 / d^2$ , вихри затухают за характерное время :

$$t_c = \frac{d^2}{2\rho_0^2} \left( 1 + \frac{\rho_0^2}{d^2} \right) v_{in}^{-1}, \quad (44)$$

а в сильноионизированной вязкой плазме,  $v_{in} \ll 0.3v_{in}\rho_i^2 / d^2$  вихревые структуры релаксируют за время:

$$t_c = \frac{d^4}{0.6\rho_0^2\rho_i^2} \left( 1 + \frac{\rho_0^2}{d^2} \right) v_{ii}^{-1}. \quad (45)$$

В обоих случаях крупномасштабные вихри ( $d \gg \rho_0$ ) затухают медленнее мелкомасштабных ( $d \ll \rho_0$ ).

Проведенные выше качественные оценки хорошо согласуются с результатами численного эксперимента.

С целью выявления особенностей влияния диссипативных процессов на эволюцию нелинейных уединенных вихревых структур, в качестве начального условия для прямого численного решения динамического уравнения (8) опять возьмем дипольный вихрь (23). Если диссипативные параметры  $b_3$  и  $b_4$  малы, влияние диссипации очень слабое и в рассматриваемое время почти незаметно. В обратном случае, когда  $b_3 \gg 1$  и/или  $b_4 \gg 1$ , доминирует быстрое затухание вихревого солитона. Поэтому обсудим наиболее интересную область  $b_3 \leq 1$  и  $b_4 \leq 1$ . Численное интегрирование уравнений (8), (П1.1) показывает, что качественно нестационарная динамика пары циклон-антициклон близка к описанному выше случаю для  $b_3 = b_4 = 0$ . Однако, теперь амплитуда потенциала  $\psi$  и завихренность  $\Delta\psi$  постепенно спадают, согласно отмеченным выше теоретическим оценкам.

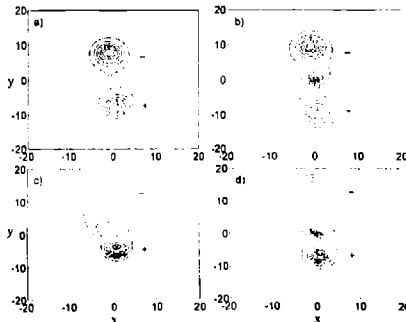


Рис. 5. Диссипативная релаксация вихревых структур. Линии уровня при:

- а).  $t = 8$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0.3$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.337$ ,  $\psi_{\min} = -0.335$ ;  
 б).  $t = 8$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0.3$ ,  $\psi_{\max} = 0.425$ ,  $\psi_{\min} = -0.424$ ;  
 в).  $t = 8$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0.2$ ,  $b_4 = 0$ ,  $\psi_{\max} = 0.460$ ,  $\psi_{\min} = -0.358$ ;  
 г).  $t = 8$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0.2$ ,  $\psi_{\max} = 0.665$ ,  $\psi_{\min} = -0.407$ .

Если дисперсия среды является слабой ( $b_1 \rightarrow 0$ ), тогда циклон и антициклон затухают равномерно. Причем, влияние вязкостной диссипации является более сильной, чем столкновительной диссипации (трения) (рис. 5а, 5б). Увеличение дисперсионных эффектов ( $b_1 \neq 0$ ) вводит анизотропию в диссипативную эволюцию структур. В случае вязкой плазмы ( $b_3 = 0.2$ ) в отсутствие трения ( $b_4 = 0$ ) со временем амплитуды нелинейных структур заметно уменьшаются, а характерные размеры увеличиваются (рис.5в). В невязкой плазме ( $b_3 = 0$ ) ионное трение ( $b_4 = 0.2$ ) относительно медленно уменьшает амплитуду возмущений и увеличивает характерный размер (рис.5г). Антициклон локализуется сильнее, чем циклон (рис. 5в,г). Поэтому, антициклон (где  $|\nabla\psi|$ ,  $\Delta\psi$  и  $\Delta^2\psi$  больше, чем в циклоне) затухает быстрее, так как эффект диссипации пропорционален градиенту потенциала ( $\sim |\nabla\psi|$ ,  $\Delta\psi$  или  $\Delta^2\psi$ ). С увеличением коэффициента вязкости  $b_3$  процесс затухания структур ускоряется. Аналогичная картина наблюдается при анализе эволюции полной энергии и энтропии структур, рассчитанной по формулам (38), (39) (см. рис. 6). Видно, что вязкостная диссипация вызывает более быстрое затухание энергии (рис.6а(1)) и энтропии (рис. 6б(1)) структур, чем трение среды (рис. 6а(2), 6б(2)).

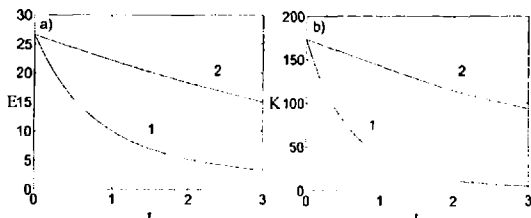


Рис.6. Эволюция энергии E (рис.6а) и энтропии K (рис.6б) вихря с начальными параметрами:

- 1).  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $b_3 = 0.3$ ,  $b_4 = 0$ ;
- 2).  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0.3$ .

Таким образом, в процессе затухания волновых возмущений преобладающую роль играет вязкостная диссипация. Причем, при воздействии силы трения вихревая структура затухает более или менее равномерно по радиусу, медленно увеличивая свой размер (рис.5г); в отличие от этого, в вязкой плазме быстрее разрушается внутренняя область вихревой структуры, чем его периферийная область (рис.5в); т.е. в вязкой плазме происходит передача количества движения по слоям – от завихренной сердцевины к обтекающей вихрь внешней части. Релаксация мелкомасштабных вихрей происходит быстрее, чем крупномасштабных. Численный эксперимент показал также, что нелинейность (как скалярная, так и векторная) практически не влияет на длительность релаксации нелинейных структур (как это следует также из формул (38), (39)).

Далее, с целью моделирования эффектов усиления вихря, например, за счет неустойчивости, был рассмотрен случай отрицательной диссипации ( $b_3 < 0$  и/или  $b_4 < 0$ ). Для плазменной среды отрицательная диссипация возникает, например, при развитии дрейфово-диссипативной неустойчивости [7]. В гидродинамике океана подобная ситуация обуславливается отрицательной вязкостью [35].

Некоторые результаты расчетов для уравнения (П1.1) с  $b_3 = 0.3$ ,  $b_4 = 0$  и  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_2 = 0$  представлены на рис. 7. Согласно рис. 7а (изолинии  $\psi$ ) и рис. 7б (поверхность  $\psi$ ), относящимся к моменту времени  $t = 3$ , за счет скалярной нелинейности, циклон и антициклон (как и раньше) расходятся одновременно, усиливаясь благодаря развитию неустойчивости (действию отрицательной диссипации):  $\psi_{min} \approx -4.141$ ,



$\psi_{\max} \approx 4.134$ . Усиление вихрей сопровождается резким увеличением градиента  $\psi$ . В данной модели инкремент роста  $\gamma$  максимален для мелкокомасштабных ( $d \ll \rho_0$ ) возмущений и согласно (10)  $\gamma \sim \nu_{\parallel} k^4 \rho_0^4 / [1 + k^2 \rho_0^2 (1 + \sigma k^2 \rho_0^2 / 2)]$  (здесь  $k^{-1} \sim d$  – характеризует размер структуры), создающих нерегулярность структуры вихря в пространстве. Это хорошо видно на рис. 7в, 7г. Следует подчеркнуть одно важное обстоятельство – в рассмотренной нелинейной модели усиливается не только исходная вихревая пара (2.3), но одновременно генерируется интенсивный, относительно мелкокомасштабный шум.

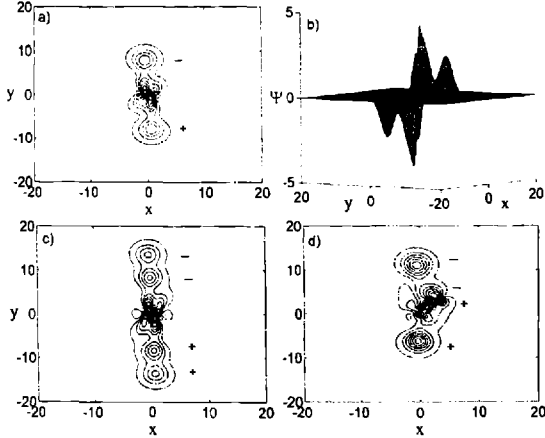


Рис. 7. Усиления вихря за счет неустойчивости (отрицательной вязкости).  
Изолинии и рельеф структур при :

- а).  $t = 3$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = -0.3$ ,  $b_4 = 0$ ,  
 $\psi_{\max} = 4.134$ ,  $\psi_{\min} = -4.141$ ;
- б).  $t = 3$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = -0.3$ ,  $b_4 = 0$ ,  
 $\psi_{\max} = 4.134$ ,  $\psi_{\min} = -4.141$ ;
- в).  $t = 4$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = -0.3$ ,  $b_4 = 0$ ,  
 $\psi_{\max} = 6.395$ ,  $\psi_{\min} = -6.415$ ;
- г).  $t = 3$ ;  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $b_3 = -0.3$ ,  $b_4 = 0$ ,  
 $\psi_{\max} = 3.105$ ,  $\psi_{\min} = -2.461$ .

## 5. Обсуждение результатов и выводы

Исследован вопрос о генерации, усилении и динамике дрейфовых вихревых структур в диссипативной плазме. Получено нелинейное уравнение, описывающее пространственно-временную эволюцию дрейфовых вихревых структур в замагниченной, двухтемпературной плазме с неоднородной равновесной плотностью и температурой, с учетом магнитной и столкновительной вязкости и силы трения. Получена также система эволюционных уравнений для интегральных характеристик вихря (энергии, энтропии). Динамическое уравнение содержит нелинейности двух типов – скалярную и векторную и по классу существенно отличается от ранее полученных обобщенных (со скалярной нелинейностью) уравнений типа Хасегавы-Мимы (ХМ) и Чарни-Обухова (ЧО). Новое уравнение имеет

четвертый порядок по пространственной производной, в отличие от уравнений типа ХМ и ЧО, имеющих второй порядок.

Полученные уравнения решены численными и аналитическими методами. Разработан новый эффективный алгоритм численного решения построенного нелинейного динамического уравнения. Численное моделирование показало, что в рамках линейного уравнения (когда отсутствуют нелинейности обоих видов и диссипативные процессы) начальный дипольный вихрь со временем распадается на многочисленные мелкие отдельные монополярные вихри – на чередующихся циклонов и антициклонов меньшей амплитуды из-за дисперсионного распыливания. То есть, динамика локального вихря в значительной степени определяется дисперсией волн. В среде образуется плотная упаковка монополярных вихрей меньших амплитуд. В конечном счете область интегрирования (область взаимодействия в среде) заполняется мелкомасштабным излучением.

В случае, когда в среде взаимодействуют эффект дисперсии и лишь векторная нелинейность, тогда первоначальный дипольный вихрь на длительное время сохраняет свою форму и амплитуду. То есть, в отсутствие скалярной нелинейности, дипольный вихрь является собственной нелинейной структурой бездиссипативной плазменной среды.

Когда среда обладает слабой дисперсией, скалярная нелинейность симметрично разъединяет пару циклон-антициклон при эволюции дипольного вихря – симметрично образуются циклон и антициклон практически равной интенсивности, формы и размера. Усиление дисперсионных свойств вводит анизотропию в процесс эволюции дипольного вихря – образуется более мощный, сильнолокализованный антициклон и более слабый, крупномасштабный циклон. В дальнейшем циклон сохраняется относительно дольше, а антициклон разбивается на мелкие вихри и диссипация ускоряет этот процесс.

На основе численного эксперимента и аналитических оценок установлено, что: при воздействии силы трения вихрь затухает более или менее равномерно по радиусу, медленно увеличивая свой размер  $d$ ; в отличие от этого, в вязкой плазме быстрее разрушается внутренняя область вихревой структуры, чем его периферийная область; т.е. в вязкой плазме происходит передача количества движения по слоям – от завихренной сердцевинки к обтекающей вихрь внешней части. Выявлено также, что релаксация крупномасштабных вихрей ( $\rho_0^2 d^2 \ll 1$ ) происходит значительно медленнее мелкомасштабных ( $\rho_0^2 d^2 \gg 1$ ). Сказанное позволяет предполагать, что в неоднородной турбулентной плазме в процессах переноса частиц и тепла основной вклад вносят долгоживущие крупномасштабные вихревые структуры.

Вихри содержат захваченные частицы, создающие дополнительный канал диссипативного перераспределения свободной энергии в системе. В экспериментальных термоядерных установках они могут существовать и расти даже в области неблагоприятной кривизны магнитных поверхностей за счет флуктуаций, возбуждающихся при дополнительном нагреве плазмы. Генерация и раскачка рассмотренных дрейфовых вихрей возможны, помимо отмеченной выше отрицательной вязкости, также при параметрическом воздействии поля электромагнитной накачки с внутренними низкочастотными плазменными полями [36], а также при взаимодействии пучков нейтралов, заряженных частиц и энергичных термоядерных  $\alpha$ -частиц с плазменными колебаниями [10, 37].

Действительно, показано что, при развитии неустойчивости, например, при воздействии отрицательной диссипации, начальный вихрь усиливается, в нем быстро возрастает завихренность, а время жизни составляющих дипольной пары (циклон-антициклон) увеличивается. В системе, по мере усиления начального вихря, генерируется интенсивный мелкомасштабный шум, и пространственная структура потенциала возмущений становится нерегулярной.

Установлено, что в процессе самоорганизации единичных дрейфовых вихрей, скалярная и векторная нелинейности играют разные роли. Причем, векторная нелинейность играет двоякую роль – в зависимости от уровня дисперсионных эффектов, векторная нелинейность содействует или дисперсии, или скалярной нелинейности компенсировать

друг друга и, тем самым, поддерживает самолокализацию волновых возмущений. В результате, в общем случае, уединенная структура является принципиально анизотропной и представляет собой круглый вихрь с наложенным конечным дипольным возмущением.

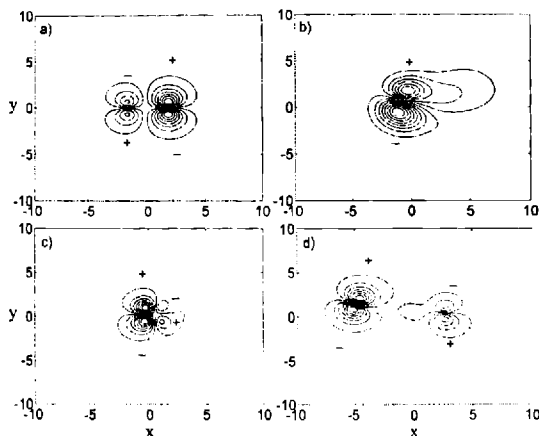


Рис. 8. Столкновения вихрей в диссипативной плазме.

а). Начальное состояние вихрей ( $t = 0$ ):

$$a = 0.2439, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad b_3 = 0.3, \quad b_4 = 0,$$

$$\psi_{1,\max} = 5.434, \quad \psi_{1,\min} = -5.434, \quad \psi_{2,\max} = 2.717, \quad \psi_{2,\min} = -2.717;$$

б).  $t = 3$ ;  $a = 0.2439, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad b_3 = 0.3, \quad b_4 = 0,$

$$\psi_{1,\max} = 2.423, \quad \psi_{1,\min} = -2.799;$$

в).  $t = 1$ ;  $a = 0.2439, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0.3,$

$$\psi_{1,\max} = 5.136, \quad \psi_{1,\min} = -5.332;$$

г).  $t = 2$ ;  $a = 0.2439, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad \alpha = 0.5, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0.3,$

$$\psi_{1,\max} = 4.449, \quad \psi_{\min} = -4.472.$$

Возникает вопрос о топологической устойчивости рассмотренных вихрей в диссипативной плазме. Свойства газа, состоящего из вышеотмеченных двумерных уединенных дрейфовых вихрей, существенно зависят от того, насколько устойчивы сами эти структуры по отношению к взаимным столкновениям, т. е. насколько хорошо они восстанавливают свою форму после взаимодействия. Для разъяснения этого вопроса мы численно исследовали взаимодействие дипольных вихрей типа (23) при их столкновении в рамках уравнения (III.1). Численный расчет показал, что при отсутствии диссипативных процессов, и в нашем случае, столкновение вихрей, в основном, происходит также, как и для классических вихрей Ларичева-Резника в рамках уравнения Хасегавы – Мимы (ХМ) [38-40] или Чарни-Обухова (ЧО) [41,42] – для соответствующих реальных параметров вихрей и среды структуры, в основном, выживают после столкновения (рисунки не приводятся) и восстанавливают прежнюю форму, т.е. являются с этой точки зрения достаточно устойчивыми (хотя, для некоторых значений параметров среды и структур, столкновения вихрей могут быть неупругими). Рассмотрим влияние диссипации на процессы столкновения структур. В диссипативной плазме процесс столкновения структур становится сильно нестационарным. Типичная эволюция со временем поля функции тока при столкновении вихрей в вязкой плазме изображена на рис. 8. В начальный момент ( $t = 0$ ) диполи

расположены в точках  $x_{01} = -1.8$ ,  $y_{01} = 0$  и  $x_{02} = 1.8$ ,  $y_{02} = 0$ , соответственно, и движутся навстречу друг другу. Расчеты проводились при амплитудах структур  $\psi_{1,\max} = 5.434$ ,  $\psi_{1,\min} = -5.434$ ,  $\psi_{2,\max} = 2.717$ ,  $\psi_{2,\min} = -2.717$ ; в вязкой среде  $b_3 = 0.3$ ,  $b_4 = 0$  и  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $b_2 = 1$ . Начальное состояние представлено на рис. 8а. К моменту времени  $t = 3$  более мощный диполь проглотил более слабый, его размер заметно увеличился (рис. 8б). В случае невязкой, столкновительной плазмы, когда  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 0.3$  и  $a = 0.2439$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $b_2 = 1$ , после столкновения выживают оба вихря, хотя их амплитуды уменьшаются (рис. 8в, 8г). Итак, диссипация оказывает существенное влияние на эволюцию уединенных нелинейных структур. В частности, вязкость сильнее влияет на столкновительную релаксацию вихрей, чем действие силы трения среды, и в вязкой плазме более сильный вихрь поглощает более слабый вихрь.

Скопление рассмотренных выше структур в замагниченной плазме может вызвать повышенный конвективный перенос частиц и тепла и, тем самым, может являться структурным элементом сильной дрейфовой турбулентности [11,12].

Полученные результаты могут представлять интерес для интерпретации экспериментальных наблюдений и численных расчетов по динамике вихрей и сильной вихревой турбулентности в диссипативных плазменных средах.

## Приложение 1.

### П1. Разностная схема с весами для обобщенного уравнения Хасегавы-Мимы

Изучение решения нелинейного уравнения в частных производных типа Хасегавы-Мимы, описывающего динамику дрейфовых волн в плазменной среде и аналогичного ему уравнения Чарни-Обухова, описывающего геофизические течения, численными методами интенсивно начались с 80-их годов прошлого века [9,41-45]. В последние годы аналогичные исследования начали развиваться и для ОУХМ и ОУЧО [15,16]. В этих и других работах для численного решения вышеотмеченных уравнений, в основном, применялись явные разностные схемы. Как известно, явные схемы для нелинейных задач имеют очень ограниченный запас устойчивости. Поэтому, мы считаем, что при равных остальных условиях, для численного решения нелинейных задач более целесообразно применение неявных схем, которые обладают достаточно высоким запасом устойчивости. Так как ОУХМ и ОУЧО имеют широкую область применения для исследования нелинейных динамических процессов в разных диспергирующих средах (для атмосферы, океана, разнообразных плазменных сред и др.), нам представляется целесообразным привести здесь разработанный нами новый алгоритм численного решения уравнения (8). В данном разделе мы предложим новую, эффективную неявную разностную схему для численного моделирования нестационарной динамики нелинейных вихревых структур в диссипативной плазме.

#### П1.1. Постановка задачи

С целью численного анализа нестационарной динамики дрейфовых структур в магнитоактивной диссипативной плазме, удобно записать уравнение (8) в безразмерных переменных

$$\frac{\partial(-a\Delta^2\psi + \Delta\psi - \psi)}{\partial t} - b_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + b_2 J(\psi, -a\Delta^2\psi + \Delta\psi - \psi) + \alpha\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} - b_3 \Delta^2\psi + b_4 \Delta\psi = 0. \quad (П1.1)$$

Здесь безразмерные коэффициенты определяются выражениями:

$$a = \sigma/2, \quad b_1 = -\alpha_n, \quad b_2 = 1 + \sigma, \quad b_3 = 1/R_i, \quad b_4 = 1/R_n;$$

$$\alpha = -\alpha_T, \quad R_i^j = 0.3v_{ij} / \omega_{B_i}, \quad R_n^j = v_{in} / \omega_{B_i}. \quad (\text{П1.2})$$

Вводя обозначение :

$$-a\Delta^2\psi + \Delta\psi - \psi = W, \quad (\text{П1.3})$$

легко можно убедиться, что справедливо представление:

$$a(\Delta - \gamma_2)(\Delta - \gamma_1)\psi = W, \quad (\text{П1.4})$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Здесь считается, что  $1-4a \geq 0$ .

Учитывая представления (П1.3),(П1.4) уравнение (П1.1) можно привести к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} - b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 J(\psi, W) \pm \alpha \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_3 W + b_6 V + b_7 \psi = 0, \\ \Delta V - \gamma_2 V = -\frac{1}{a} W, \\ \Delta \psi - \gamma_1 \psi = V. \end{cases} \quad (\text{П1.5})$$

Здесь  $b_3 = b_3/a$ ,  $b_6 = b_4 - b_5$ ,  $b_7 = \gamma \cdot b_6 + b_5$ .

Система (П1.5) решается в цилиндрической области  $(x, y, t) \in Q_T = \Omega \times ]0; T[$ , где  $\Omega$  есть прямоугольник  $\Omega = ]-a_1; a_1[x] - a_2; a_2[$ . Начальное условие при  $t=0$  берется в виде:  $\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y)$ , где  $\psi_0(x, y)$  достаточно гладкая функция. Что касается граничных условий, то они будут подобраны после перехода к системе разностных уравнений. При этом, подразумевается, что граничные условия должны быть согласованы с начальными условиями.

### П1.2. Неявная схема с весами

Проведем аппроксимацию первого уравнения системы (П1.5) в точке  $(x, y, t_k)$ , где  $t_k = kt$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ( $n > 1$  натуральное число) следующей полудискретной схемой:

$$\begin{aligned} & \frac{W^k - W^{k-1}}{\tau} - b_1 \left( \vartheta \frac{\partial \psi^k}{\partial x} + (1-\vartheta) \frac{\partial \psi^{k-1}}{\partial x} \right) + b_2 \left( \vartheta J(\psi^{k-1}, W^k) + (1-\vartheta) J(\psi^k, W^{k-1}) \right) \pm \\ & \alpha \left( \vartheta \psi^{k-1} \frac{\partial \psi^k}{\partial x} + (1-\vartheta) \psi^k \frac{\partial \psi^{k-1}}{\partial x} \right) + b_3 \left( \vartheta W^k + (1-\vartheta) W^{k-1} \right) + \\ & b_6 \left( \vartheta V^k + (1-\vartheta) V^{k-1} \right) + b_7 \left( \vartheta \psi^k + (1-\vartheta) \psi^{k-1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.6})$$

где параметр  $\vartheta$  находится в промежутке  $[0, 1]$ .

Стандартным способом легко можно показать, что разностное уравнение (П1.6) аппроксимирует первое уравнение системы (П1.5) в точке  $(x, y, t_k)$  с точностью  $O(\tau^2 + (1-2\vartheta)\tau)$ . Итак, в случае  $\vartheta = 1$  получается неявная схема (линеаризованная на каждом временном слое  $t_k$ ) первого порядка по  $\tau$ , а в случае  $\vartheta = 1/2$  второго порядка по  $\tau$ . При  $\vartheta = 0$  получается явно-неявная схема (явная по  $W$  и неявная по  $\psi$ ).

Если в уравнении (П1.6) пространственные производные первого и второго порядка заменим на центральные разности, то получим следующее разностное уравнение:

$$\frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^{k-1}}{\tau} = b_1 \left( \mathcal{G} \frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} + (1-\mathcal{G}) \frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1} \right) - b_2 \left( \mathcal{G} J(\psi_{i,j}^{k-1}, W_{i,j}^k) + (1-\mathcal{G}) J(\psi_{i,j}^k, W_{i,j}^{k-1}) \right) \pm$$

$$a \left( \mathcal{G} \psi_{i,j}^{k-1} \frac{\psi_{i+1,j}^k - \psi_{i-1,j}^k}{2h_1} + (1-\mathcal{G}) \psi_{i,j}^k \frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1} \right) - b_5 (\mathcal{G} W_{i,j}^k + (1-\mathcal{G}) W_{i,j}^{k-1}) -$$

$$b_6 (\mathcal{G} V_{i,j}^k + (1-\mathcal{G}) V_{i,j}^{k-1}) + b_7 (\mathcal{G} \psi_{i,j}^k + (1-\mathcal{G}) \psi_{i,j}^{k-1}),$$

где  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $x_i = -a_1 + ih_1$ ,  $y_j = -a_2 + jh_2$ ,  $t_k = k\tau$ ;

$$J(\psi_{i,j}^{k-1}, W_{i,j}^k) = \frac{\psi_{i+1,j}^{k-1} - \psi_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1} \frac{W_{i,j+1}^k - W_{i,j-1}^k}{2h_2} - \frac{\psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h_2} \frac{W_{i+1,j}^k - W_{i-1,j}^k}{2h_1}.$$

Восстановление функции тока  $\psi$  происходит по значениям обобщенного  $W$  и промежуточного  $V$  вихрей, которые, согласно второму и третьему уравнению системы (П1.5), определяются из разностных уравнений:

$$L_h[V_{i,j}^k] - \gamma_2 V_{i,j}^k = -\frac{1}{a} W_{i,j}^k, \quad (\text{П1.8})$$

$$L_h[\psi_{i,j}^k] - \gamma_1 \psi_{i,j}^k = V_{i,j}^k, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (\text{П1.9})$$

где  $L_h$  разностный оператор, соответствующий лапласиану

$$L_h[\psi_{i,j}^k] = \frac{\psi_{i+1,j}^k - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^k - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i,j-1}^k}{h_2^2}$$

Для системы разностных уравнений (П1.7), (П1.8) и (П1.9) получаем следующие начальные и граничные условия:

$$W_{i,j}^0 = -a\Delta^2 \psi_0(x_i, y_j) + \Delta \psi_0(x_i, y_j) - \psi_0(x_i, y_j), \quad \psi_{i,j}^0 = \psi_0(x_i, y_j) \quad (\text{П1.10})$$

$$W_{0,j}^k = W_{0,j}^0, \quad W_{N_1,j}^k = W_{N_1,j}^0, \quad W_{i,0}^k = W_{i,0}^0, \quad W_{i,N_2}^k = W_{i,N_2}^0, \quad (\text{П1.11})$$

$$V_{0,j}^k = V_{0,j}^0, \quad V_{N_1,j}^k = V_{N_1,j}^0, \quad V_{i,0}^k = V_{i,0}^0, \quad V_{i,N_2}^k = V_{i,N_2}^0, \quad (\text{П1.12})$$

$$\psi_{0,j}^k = \psi_{0,j}^0, \quad \psi_{N_1,j}^k = \psi_{N_1,j}^0, \quad \psi_{i,0}^k = \psi_{i,0}^0, \quad \psi_{i,N_2}^k = \psi_{i,N_2}^0 \quad (\text{П1.13})$$

Таким образом, система (П1.7)-(П1.13) представляет собой полную систему. Естественно, значения сеточных функций  $W_{i,j}^k$ ,  $V_{i,j}^k$  и  $\psi_{i,j}^k$  можно считать приближенными значениями точных решений  $W(x, y, t)$ ,  $V(x, y, t)$  и  $\psi(x, y, t)$  в точке  $(x_i, y_j, t_k)$ .

Систему разностных уравнений (П1.7)-(П1.13) решаем с помощью следующего итерационного процесса:

$$W_{i,j}^m = W_{i,j}^{m-1} + \tau F(\psi_{i,j}^{m-1}, \psi_{i,j}^k, \psi_{i,j}^{m-1}, W_{i,j}^{m-1}, W_{i,j}^{k-1}, V_{i,j}^{m-1}, V_{i,j}^{k-1}), \quad (\text{П1.14})$$

$$L_h[V_{i,j}^m] - \gamma_2 V_{i,j}^m = -\frac{1}{a} W_{i,j}^m, \quad (\text{П1.15})$$

$$L_h[\psi_{i,j}^m] - \gamma_1 \psi_{i,j}^m = V_{i,j}^m, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (\text{П1.16})$$

где  $m$  номер итерации ( $m = 1, 2, \dots$ ),  $F$  - правая часть уравнения (П1.7).

Систему разностных уравнений (П1.15) и аналогичную систему (П1.16) решаем по отношению к переменной  $x$  методом факторизации, а по отношению к переменной  $y$  с использованием итерации:

$$-\psi^k_{i+1,j} + a\psi^k_{i,j} - \psi^k_{i-1,j} = \alpha_0^2 (\psi^k_{i,j+1} + \psi^k_{i,j-1}) - h_1^2 V^k_{i,j}, \quad (\text{П1.17})$$

где  $m$  номер итерации ( $m = 1, 2, \dots$ );  $\alpha_0 = h_1 / h_2$ ,  $a = 2 + 2\alpha_0^2 + \gamma h_1^2$ .

**Замечание.** В итерации (П1.14)-(П1.16) начальным приближением берем значения соответствующих функций на прежнем  $k-1$  слое, что значительно ускоряет сходимость итерационного процесса.

Доказательство единственности решения задачи (П1.5) с соответствующими начальными граничными условиями приводится в приложении 2.

## Приложение 2

### П2. Единственность решения задачи

Для простоты, за область  $\Omega$  возьмем единичный квадрат  $\Omega = ]0;1[ \times ]0;1[$ . Для системы (П1.5) рассматриваем следующую начально-граничную задачу:

$$W(x, y, 0) = W_0(x, y), \quad (\text{П2.1})$$

$$W(0, y, t) = W(1, y, t), \quad W(x, 0, t) = W(x, 1, t), \quad (\text{П2.2})$$

$$V(0, y, t) = V(1, y, t), \quad V(x, 0, t) = V(x, 1, t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (\text{П2.3})$$

$$\psi(0, y, t) = \psi(1, y, t), \quad \psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t), \quad (\text{П2.4})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad \forall t \in [0; T]. \quad (\text{П2.5})$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Задача (П1.5), (П2.1)-(П2.5) имеет не более одного решения в классе достаточно гладких функций.

**Доказательство.** Допустим, задача (П1.5), (П2.1)-(П2.5) имеет два решения  $(W, V, \psi)$  и  $(\tilde{W}, \tilde{V}, \tilde{\psi})$ , тогда вектор  $(u, \eta, \zeta)$  (где  $u = W - \tilde{W}$ ,  $\eta = V - \tilde{V}$  и  $\zeta = \psi - \tilde{\psi}$ ) удовлетворяет следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - b_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b_2 J(\psi, u) + b_2 J(\zeta, \tilde{W}) \pm \alpha \zeta \frac{\partial \psi}{\partial x} \pm \alpha \tilde{\psi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b_3 u + b_6 \eta + b_7 \zeta = 0, \\ \Delta \eta - \gamma_2 \eta = -\frac{1}{a} u, \\ \Delta \zeta - \gamma_1 \zeta = \eta, \end{cases} \quad (\text{П2.6})$$

Для получения первого уравнения системы (П2.6) мы использовали следующие простые формулы:

$$J(\psi, W - \tilde{W}) = J(\psi, W) - J(\psi, \tilde{W}) ,$$

$$J(\psi - \tilde{\psi}, \tilde{W}) = J(\psi, \tilde{W}) - J(\tilde{\psi}, \tilde{W}) .$$

Умножая обе стороны первого уравнения системы (П2.6) на  $u$  и, интегрируя полученное выражение по области  $\Omega$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial t} dx dy - b_1 \int_{\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial x} u dx dy + b_2 \int_{\Omega} J(\psi, u) u dx dy + b_3 \int_{\Omega} J(\zeta, \tilde{W}) u dx dy \pm \\ & \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \zeta u dx dy \pm \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tilde{\psi} u dx dy + b_4 \int_{\Omega} u^2 dx dy + b_5 \int_{\Omega} \eta u dx dy + b_6 \int_{\Omega} \zeta u dx dy = 0 . \end{aligned}$$

Покажем, что справедливо следующее равенство:

$$\int_{\Omega} J(\psi, u) u dx dy = 0$$

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} J(\psi, u) u dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u^2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( u^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( u^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dy - \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( u^2(x, 1, t) \frac{\partial \psi(x, 1, t)}{\partial x} - u^2(x, 0, t) \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial x} \right) dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( u^2(1, y, t) \frac{\partial \psi(1, y, t)}{\partial y} - u^2(0, y, t) \frac{\partial \psi(0, y, t)}{\partial y} \right) dy = 0 . \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношения :

$$\frac{\partial \psi(x, 1, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial x} , \quad \frac{\partial \psi(1, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(0, y, t)}{\partial y} ,$$

которые вытекают из граничных условий (П2.4).

Если третье уравнение системы (П2.6) умножим на  $\zeta$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ , при этом используя формулу частичного интегрирования и учитывая, что функция  $\zeta$  удовлетворяет периодическим граничным условиям, тогда получим:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \gamma_2 \int_{\Omega} \zeta^2 dx dy = - \int_{\Omega} \eta \zeta dx dy . \quad (\text{П2.7})$$

Аналогично, из второго уравнения системы (П2.6) получаем:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \gamma_1 \int_{\Omega} \eta^2 dx dy = \frac{1}{a} \int_{\Omega} u \eta dx dy . \quad (\text{П2.8})$$

Согласно неравенству Шварца и  $\varepsilon$ -неравенству имеем:



$$\int_{\Omega} |u\eta| dx dy \leq \left( \int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \eta^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} u^2 dx dy + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \eta^2 dx dy \right). \quad (\text{П2.9})$$

Подберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы удовлетворялось условие:

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 > 0,$$

тогда с учетом (П2.9), из (П2.8) получим:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \alpha_1 \int_{\Omega} \eta^2 dx dy \leq c_1 \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad (\text{П2.10})$$

где  $c_1 = \text{const} > 0$ .

Аналогично из (П2.8) следует неравенство:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \alpha_2 \int_{\Omega} \zeta^2 dx dy \leq c_2 \int_{\Omega} \eta^2 dx dy, \quad (\text{П2.11})$$

где  $\alpha_2$  и  $c_2$  положительные константы.

С учетом (П2.10), из (П2.11) вытекает:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \alpha_2 \int_{\Omega} \zeta^2 dx dy \leq c_0 \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad (\text{П2.12})$$

где  $c_0 = \text{const} > 0$ .

Оценим интеграл с якобианом  $J(\zeta, \tilde{W})$  в уравнении (П2.5). Ясно, что справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} J(\zeta, \tilde{W}) |u| dx dy \leq \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} \right| \right) |u| dx dy \leq c_3 \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \right) |u| dx dy, \quad (\text{П2.13})$$

$$c_3 = \max_{(x,y,t)} \left( \left| \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y} \right| \right), \quad (x, y, t) \in \bar{Q}_T.$$

Согласно неравенству Шварца имеем:

$$\int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \right) |u| dx dy \leq \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dx dy \right]^{1/2} + \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 dx dy \right]^{1/2} \left[ \int_{\Omega} u^2 dx dy \right]^{1/2} \quad (\text{П2.14})$$

С учетом (П2.14), из (П2.13) вытекает, что

$$\left( \int_{\Omega} J(\zeta, \tilde{W}) |u| dx dy \right)^2 \leq 2c_3^2 \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 dx dy \right) \int_{\Omega} u^2 dx dy. \quad (\text{П2.15})$$

Здесь использовано тривиальное неравенство:  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ .

С учетом (П2.12), из (П2.15) вытекает:

$$\int_{\Omega} |J(\zeta, \bar{W})u| dx dy \leq c_4 \int_{\Omega} u^2 dx dy \quad c_4 = \text{const} > 0. \quad (\text{П2.16})$$

Сейчас оценим члены, содержащие скалярные нелинейности в (П2.5). Согласно неравенству Шварца имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \zeta u \right| dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{\psi} u \right| dx dy \leq c_5 \int_{\Omega} \zeta u dx dy + c_6 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} u \right| dx dy \\ & \leq c_5 \left( \int_{\Omega} \zeta^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2} + c_6 \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{П2.17})$$

$$\text{где} \quad c_5 = \max_{(x,y,t)} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|, \quad c_6 = \max_{(x,y,t)} |\bar{\psi}|, \quad (x, y, t) \in \bar{Q}_T.$$

Ясно, что из (П2.13) вытекает:

$$\int_{\Omega} \zeta^2 dx dy \leq \frac{c_0}{\alpha_2} \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad (\text{П2.18})$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq c_0 \int_{\Omega} u^2 dx dy. \quad (\text{П2.19})$$

С использованием неравенств (П2.18) и (П2.19), из (П2.17) получается следующая оценка:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \zeta u \right| dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{\psi} u \right| dx dy \leq c_7 \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad (\text{П2.20})$$

где  $c_7 = \text{const} > 0$ .

Аналогично получается следующая оценка:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} u \right| dx dy \leq c_8 \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad c_8 = \text{const} > 0. \quad (\text{П2.21})$$

Согласно (П2.10) и (П2.12) справедлива оценка:

$$|b_6| \int_{\Omega} |\eta u| dx dy + |b_6| \int_{\Omega} \zeta u dx dy \leq c_9 \int_{\Omega} u^2 dx dy, \quad c_9 = \text{const} > 0. \quad (\text{П2.22})$$

Учитывая оценки (П2.16), (П2.20), (П2.21), (П2.22) и равенство (П2.6), из (П2.5) получаем:

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq cE(t), \quad c = \text{const} > 0, \quad (\text{П2.23})$$

где  $E(t) = \int_{\Omega} u^2 dx dy$ .

Как известно, из (П2.23) вытекает неравенство

$$E(t) \leq e^{-ct} E(0). \quad (\text{П2.24})$$

С учетом условий  $E(0) = 0$ , из (П2.24) следует, что

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2 dx dy = 0.$$

А отсюда вытекает, что  $u(x, y, t) \equiv 0$ , или что тоже самое  $W(x, y, t) \equiv \tilde{W}(x, y, t)$ . С учетом этого тождества, из неравенств (П2.10) и (П2.12) следуют равенства  $\eta(x, y, t) \equiv 0$  и  $\zeta(x, y, t) \equiv 0$ , соответственно.

Этим теорема доказана.

### Литература

1. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т.2. М.: Атомиздат, 1977.
2. Мухоматов В.С. В сб.: Итоги науки и техники. Сер.: Физика плазмы. Т.1. М.: ВИНТИ, 1980. С. 6-118.
3. Хортон В. Основы физики плазмы. М.: Энергоатомиздат. Вып.2. С.362. 1984.
4. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.  
5. Migliuolo S. J. Geophys. Res. A. 1984. V.89. № 12. P. 11023.
6. Kamide Y., Chian A. (Edts.) Handbook of the Solar-Terrestrial Environment. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
7. Кадомцев Б.Б. Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 188.
8. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Физика плазмы. 1986. Т.12. №9. С.1127.
9. Horton W., Hasegawa A. CHAOS. 1994.V.4. P. 227.
10. Абурджания Г.Д. Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах. М.: КомКнига, URSS, 2006.
11. Абурджания Г.Д. Физика плазмы. 1990.Т. 16. № 1. С. 70.
12. Aburjania G.D., Chargazia Kh. Z., Zeleny L. M., Zimbardo G. Nonlinear Process. Geophys. 2009. V. 16. P. 11.
13. Aburjania G.D., Mikhailovskii A.B., Sharapov S.E. Plasma Phys. Contr. Fusion. 1984. V.26. P. 603.
14. Aburjania G.D., Ivanov V.N., Kamenetz F.F., Pukhov A.M. Physica Scripta. 1987. V.35. P. 677.
15. Kaladze T.D., Aburjania G.D., Kharshiladze O.A., Horton W., Kim Y.-H. J. Geophys. Res. 2004. V. 109. A05302, doi:10.1029/2003JA010049
16. Aburjania G.D., Chargazia Kh.Z., Kharshiladze O.A. J. Atmos. Sol.- Terr. Physics. 2010. doi: 10.1016/j.jastp. 2010.05.008.
17. Михайловский А.Б., Лахин В.П., Михайловская Л.А. Физика плазмы. 1985.Т. 11. № 7. С. 833.
18. Williams G.P., Yamagata T. J. Atmos. Sci. 1984. V. 41. P 453.
19. Незлин М.В., Черников Г.П. Физика плазмы. 1995. Т. 21. №11. С.975.
20. Horton W. Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma. Institute for Fusion Studies the University of Texas at Austin. IFSR- № 416.Review. Austin. Texas, 1990.
21. Nezhlin M.V. CHAOS. 1994. V.4. P. 187.
22. Абурджания Г.Д. Физика плазмы. 1996.Т. 22. № 10. С. 954.
23. Liewer P.C. Nucl Fusion. 1985. V.25. №5. P. 543.
24. Mikhailovskii A.B., Lakhin V.P., Aburjania G.D., Mikhailovskaya L. A., Onishchenko O.G. Plasma Phys. Contr. Fusion. 1987.V. 29. №1. P.1.
25. Ларичев В.Д., Резник Г.М. Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №1. С. 229.
26. Onishchenko O.G., Pokhotelov O.G., Pavlenko V.P. et al. Phys. Plasmas. 2001. V. 8. . №1. P. 59.

27. Литвак А.Г., Сергеев А.М. Нелинейные эффекты при высокочастотном нагреве плазмы. В кн.: *Высокочастотный нагрев плазмы*. Горький: Институт прикладной физики АН СССР, 1983. С. 324.
28. Негустович В.И., Шаталов Г.Е. В кн.: *Итоги науки и техники. Физика плазмы*. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1981.
29. Hajkowicz L.A. *Planet. Space Sci.* 1991. V.39. P. 583.
30. Hayakawa M. (Edit). *Atmospheric and ionospheric phenomena associated with earthquakes*. Tokyo: Terra Sci. Publ. Comp. 1999.
31. Дробжев В.И., Молоетов Г.Ф., Рудина М.П. и др. *Ионосферные исследования*. 1986. №39. С.61.
32. Shafer L.D., Rock D.R., Lewis J.P. et al. *Preprint Lawrence Livermore Laboratory № 94550*. CA, USA. Livermore: LLL, 1999.
33. Карпман В.И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. М.: Наука, 1973.
34. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.
35. Старр В. *Физика явлений с отрицательной вязкостью*. М.: Мир, 1971.
36. Shukla P.K., Yu M.Y., Tsintsadze N.L. *Phys. Lett.* 1987. V.121. №3. P. 131.
37. Михайловский А.Б. *Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках*. М.: Атомиздат, 1978.
38. Taniuti T., Hasegawa A. *Physica Scripta*. 1982. V. T2/2. P. 529.
39. Петвиашвили В.И., Смирнов А.П. *ДАН СССР*. 1984. Т.277. №1. С.88.
40. Павленко В.П., Таранов В.Б. *Физика плазмы*. 1984. Т.10. №6. С.1303.
41. Ларичев В.Д., Резник Г.М. *ДАН СССР*. 1982. Т.264. №1. С.229.
42. Makino M., Kamimura T., Taniuti T. *Journal Phys. Soc. Japan*. 1981. V. 50. №3. P.980.
43. McWilliams J.C., Flierl G.R., Larichev V.D., Reznik G.M. *Dyn. Atm. Ocean*. 1981. V. 5. P.219.
44. Михайловская Л.А. *Физика плазмы*. 1986. Т.12. №7. С. 879.
45. Campbell L.J., Maslowe S.A. *J. Math. Comput. Simul.* 2001. V. 55, No. 4-6. P. 365.

**დრეიფული გრივალური სტრუქტურების არაწრფივი დინამიკის რიცხვითი მოდელირება იონოსფერულ არაერთგვაროვან ბლანტ პლაზმაში**

აბურჯანია გ, როგაყა ჯ, ხარშილაძე ო.

რეზიუმე

გამოკვლეულია ძლიერად ლოკალიზებული გრივალური სტრუქტურების გენერაციისა და არაწრფივი დინამიკის თავისებურებანი მაგნიტოაქტიურ ნაწილობრივ-იონიზებულ არაერთგვაროვან დისიპაციურ პლაზმაში. მიღებულია გრძელ-ტაღლოვანი დრეიფული ტაღლოური სტრუქტურების გადატანის არაწრფივი განტოლება, რომელიც ითვალისწინებს გარემოს წონასწორული სიმკვრივისა და ტემპერატურის სივრცით არაერთგვაროვნებას, მაგნიტურ და დაჯახებით სიბლანტეს და ხახუნს. დინამიკური განტოლება შეიცავს ორი სახის არაწრფივობას: სკალარულ არაწრფივობას (განპირობებული ტემპერატურის არაერთგვაროვნებით) და ვექტორულ არაწრფივობას (განპირობებული გარემოს ნაწილაკების კონექციურ-პოლარიზაციული მოძრაობით). ნაპოვნია ამ არაწრფივი განტოლების ზუსტი ანალიზური ამონახსნი ახალი ტიპის ძლიერად ლოკალიზებული სტაციონარული გრივალური სტრუქტურების სახით. რიცხვითი მოდელირების საფუძველზე გამოვლენილია, რომ ვექტორული არაწრფივობა

თამაშობს ორგვარ როლს – ეხმარება ან დისპერსიას ანდა სკალარულ არაწრფივობას (მათი სიდიდის მიხედვით) ურთიერთ წონასწორობის შენარჩუნებაში და შესაბამისად, ხელს უწყობს განმხოლოებული გრიგალური სტრუქტურების თვითორგანიზაციას. ნაჩვენებია, რომ სუსტი დისპერსიის პირობებში საწყისი დიპოლის ევოლუციისას, სკალარული არაწრფივობა სიმეტრიულად განაცალკეებს ციკლონ-ანტიციკლონის წყვილს და წარმოიქმნება, თითქმის ერთნაირი ინტენსივობის, ფორმისა და ზომის დამოუკიდებელი ციკლონი და ანტიციკლონი. დისპერსიული ეფექტების გაზრდისას სტრუქტურების განცალკეება ხდება ანიზოტროპული: წარმოიქმნილი ანტიციკლონი არის უფრო ინტენსიური და ლოკალიზებული, ხოლო ციკლონი არის უფრო სუსტი და დიდმასშტაბიანი. გრიგალის მილევის დრო არსებითად არის დამოკიდებული გრიგალის მახასიათებელ ზომაზე: დიდმასშტაბიანი გრიგალები უფრო მეტ ხანს ცოცხლობენ. ნაჩვენებია, რომ არამდგრადობის არსებობისას საწყისი გრიგალი ძლიერდება, ხოლო დიპოლის შემადგენელი წყვილის (ციკლონ-ანტიციკლონის) სიკოცხლის ხანგრძლივობა იზრდება. განმხოლოებული გრიგალური სტრუქტურების ერთმანეთთან და გარემოსთან ურთიერთქმედების დადგენილი სურათი აჩვენებს, რომ არაერთგვაროვან პლაზმურ გარემოში გრიგალურ სტრუქტურებს შეუძლიათ განაპირობონ ძლიერი დრეიფული ტურბულენტობის, ნიუთიერებისა და სითბოს ანომალური გადატანის ფორმირება.

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДРЕЙФОВЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ**

**Абурджанна Г.Д., Рогова Д.Л., Харшиладзе О.А.**

### **Резюме**

Исследуются особенности генерации и нелинейной динамики уединенных вихревых структур в замагниченной неоднородной частично-ионизированной диссипативной плазме. Выведено нелинейное уравнение переноса длинноволновых дрейфовых волновых структур, учитывающее неоднородность равновесной плотности и температуры плазмы, магнитную и столкновительную вязкость и трение среды. Динамическое уравнение содержит два типа нелинейности: скалярную (обусловленную неоднородностью температуры) и векторную (обусловленную конвективно-поляризационным движением частиц среды). Найдено стационарное точное аналитическое решение нелинейного уравнения в виде нового типа дипольных уединенных вихрей. Численным моделированием выявлено, что векторная нелинейность может играть двойную роль – помогает дисперсии или скалярной нелинейности (в зависимости от их величин) обеспечивать взаимное равновесие и, тем самым, содействует самоорганизации уединенных вихревых структур. Показано, что при слабой дисперсии, скалярная нелинейность симметрично разделяет пару циклон-антициклон при эволюции начального дипольного вихря и образуются независимые циклон и антициклон практически равной интенсивности, формы и размера. С увеличением дисперсионных эффектов процесс разьединения структур становится анизотропным: образовавшийся антициклон является более интенсивным и локализованным, а циклон более слабым и крупномасштабным. Время затухания вихря существенным образом зависит от его характерного размера: крупномасштабные вихри являются более долгоживущими. Показано, что при развитии неустойчивости, начальный вихрь усиливается, а время жизни составляющих дипольной пары (циклон-антициклон) увеличивается. Установленная картина взаимодействия уединенных вихревых структур между собой и со средой показывает, что

вихревые структуры могут быть составной частью сильной дрейфовой турбулентности и аномального переноса вещества и тепла в неоднородной замагниченной плазменной среде.

## **Numerical modelling of nonlinear dynamics of the drift vortex structures in the ionospheric inhomogeneous viscous plasma**

Aburjania G., Rogava J., Kharshiladze O.

### Abstract

The features of generation and nonlinear dynamics of solitary vortical structures in a magnetized nonuniform partially ionized dissipative plasma are investigated. We derive a nonlinear equation of transfer of long-wavelength drift wave structures, taking into account the inhomogeneity of the equilibrium plasma density and temperature, magnetic and collisional viscosity and medium friction. The dynamic equation contains two types of nonlinearity: the scalar (due to heterogeneity of the temperature) and vector (due to convective-polarization motion of particles of the medium). The stationary analytic solution of nonlinear equations in the form of a new type of solitary dipole vortices has been found. Numerical simulations showed that the vector nonlinearity may play a dual role - it helps the dispersion or scalar nonlinearity (depending on their values) to provide mutual equilibrium and thus, contributes to self-organization of solitary vortex structures. It is shown that for weak dispersion, the scalar nonlinearity symmetrically divides the cyclone-anticyclone pair in the evolution of the initial dipole vortex and form an independent cyclone and anticyclone of almost equal intensity, shape and size. With the increase of dispersion process of separation structures is anisotropic: the resulting anticyclone is more intense and localized, and a cyclone over the weak and large scale. The decay time of the vortex strongly depends on its characteristic size: large-scale vortices are more long-lived. It is shown, that with the development of instability, the initial vortex insify, while the lifetime of the dipole pair (cyclone-anticyclone) increases. The established picture of the interaction of solitary vortex structures among themselves and with the environment shows that the vortex structure can be part of a strong drift turbulence and anomalous transport of matter and heat in an inhomogeneous magnetized plasma medium.