მიხეილ ნოდიას გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. LXII, 2010
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, vol. LXII, 2010
Труды Института геофизики им. М. Нодиа, т. LXII, 2010

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ОШИБОК ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГИИ

Месхия В.Ш., Аманаташвили Я.Т.

Государственный Университет Ильи
Пр. Какуца Чолокашвили 3/5

Задачу оценки погрешности определения координат гипоцентра и времени возникновения землетрясений можно поставить по-разному. Можно попытаться оценить максимум погрешностей названных величин или оценить какую-либо наперед заданную их норму, без предварительного решения самой задачи определения координат гипоцентра и времени в очаге $[1-8]$. Такая постановка задачи приводит к тому, что во-первых гарантированная такой оценкой точность может быть сильно заниженной. Так, если областью изменения искомого четырехмерного вектора является эллипсоид, а для оценки выбрана сферическая норма, то наилучшая оценка погрешности получится при радиусе сферы, равном большой полуоси эллипсоида, что при сильно вытянутых в одном направлении эллипсоидов может дать довольно грубые оценки. Во-вторых разная размерность искомых величин (пространственные координаты и время) и следовательно их погрешность приводит к дополнительным неудобствам.

Мы будем придерживаться к такой постановке задачи, когда определение области возможной ошибки будет рассматриваться составной частью задачи определения координат гипоцентра и времени в очаге так же, как и в $[9-12]$. Кроме того, следуя работе $[1]$ мы будем пользоваться методами линейной теории, когда для любой конечной вычислительной задачи $x=f(y)$ корреляционная матрица (матрица моментов) $\Delta(x)$ для ошибок результата: $\Delta_{ik}(x)=E(x_i-\overline{X_i})(x_k-\overline{X_k})$ связана с корреляционной матрицей $\Delta(y)$ ошибок входных данных: $\Delta_{ik}(y)=E(y_i-\overline{Y_i})(y_k-\overline{Y_k})$ по формуле

$$\Delta(x)=J\Delta(y)J^T$$

где: J - матрица Якоби, J^T - транспонированная матрица Якоби, $\overline{X_i}$ и $\overline{Y_i}$ - математические ожидания (E) компонент x_i и y_i:

$\overline{X_i}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_i g(x_i)dx$, $\overline{Y_i}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y_i g(y)dy$, а $g(x_i)$, $g(y_i)$-плотности распределения вероятностей величин x_i и y_i соответственно.

Для анализа матрицы моментов входных данных рассмотрим алгоритм определения координат гипоцентра и времени в очаге на основе блочного скоростного строения $[2-3]$. Обозначим через $\psi_j(\varphi,\lambda,h)$ время пробега сейсмической волны из точки с координатами (φ,λ,h) до j - той стаиции. Нелинейная система уравнений для определения координат (φ,λ,h) имеет вид

$$\psi_j(\varphi,\lambda,h)+t_0=t_j,\quad (j=1,2,3,..n) \qquad (1)$$

где t_j - наблюденное время вступления волны на j - той станции, t_0 - время в очаге. Последнее, как правило также подлежит определению из уравнения (1) и, следовательно мы имеем n уравнений с четырьмя неизвестными. Предположим, что найдены достаточно хорошие приближения координат $(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h)$ и времени в очаге $\bar t_0$, и разложим левую часть уравнений (1) в окрестности точки $(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h,\bar t_0)$ в ряд Тейлора, пренебрегая членами второго порядка малости.

$$\psi_j(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h)+\bar t_0+(\varphi-\bar\varphi)\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}+(\lambda-\bar\lambda)\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda}+(h-\bar h)\frac{\partial\psi_j}{\partial h}+(t_0-\bar t_0)=t_j \qquad (2)$$

где производные $\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\psi_j}{\partial h}$ вычислены в точке $(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h)$. Полученную линейную систему уравнений

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}\varphi+\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda}\lambda+\frac{\partial\psi_j}{\partial h}h+t_0=t_j+\bar\varphi\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}+\bar\lambda\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda}+\bar h\frac{\partial\psi_j}{\partial h}-\psi_j(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h) \qquad (3)$$

запишем в матричном виде $Ax=b$ или

$$\sum_{k=1}^{4}a_{kj}x_k=b_j, \qquad (j=1,2,3,...n) \qquad (4)$$

где $x_1=\varphi$, $x_2=\lambda$, $x_3=h$, $x_4=t_0$,

$$a_{1j}=\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi},\quad a_{2j}=\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda},\quad a_{3j}=\frac{\partial\psi_j}{\partial h},\quad a_{4j}=1,$$

$$b_j=t_j+\bar\varphi\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}+\bar\lambda\frac{\partial\psi_j}{\partial\lambda}+\bar h\frac{\partial\psi_j}{\partial h}-\psi_j(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h) \qquad (5)$$

В работе $[2]$ для нахождения координат гипоцентра и времени в очаге минимизируется нелинейный функционал

$$\sum_{j=1}^{n}p_j(\psi_j(\varphi,\lambda,h)+t_0-t_j)^2, \qquad (6)$$

где p_j - определенным образом подобранные $[2]$ весовые числа. Используя вновь формулу Тейлора, нелинейный функционал (6) сводим к квадратичному

$$\sum_{j=1}^{n}p_j(A_jy-d_j)^2 \qquad (7)$$

где через A_j обозначена j-ая строка матрицы A, и искомый вектор дает поправку к приближению $(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h,t_0)$

$$y_1=\varphi-\bar\varphi,\quad y_2=\lambda-\bar\lambda,\quad y_3=h-\bar h,\quad y_4=t-t_0,\quad d_j=t_j-\bar t_0-\psi_j(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h) \qquad (8)$$

Заметим, что оценка погрешности входных данных d_j в формуле (8) более простая задача, чем оценка входных данных b_j в формуле (5), ибо последние содержат значения $(\bar\varphi,\bar\lambda,\bar h)$ в виде множителей.

Нахождение экстремума квадратичного функционала (7) равносильно задаче нахождения решения методом наименьших квадратов системы

$$\sqrt{p}Ay=\sqrt{p}d \qquad (9)$$

где $\sqrt{p}=diag\|\sqrt{p_1},\sqrt{p_2},\sqrt{p_3},...,\sqrt{p_n}\|$.

Умножая равенство (9) на матрицу $(\sqrt{p}A)^T=A^T\sqrt{p}$ получаем нормальную систему уравнений.

$$A^TpAy=A^Tpd \qquad (10)$$

Предполагая весовую диагональную матрицу p, заданной точно (что далеко неочевидно, ввиду некоторого произвола их выбора $[2]$) и, дифференцируя равенство (10) получаем

$$\delta(A^T)pAy + A^T p\delta(A)y + A^T pA\delta(y) = \delta(A^T)pd + A^T p\delta(d) \quad \text{или}$$

$$\delta(y) = (A^T pA)^{-1} A^T p(\delta(d) - \delta(A)y) + (A^T pA)^{-1}\delta(A^T)p(d - Ay) \qquad (11)$$

Второе слагаемое в правой части (11) является специфическим для решения системы с неквадратной матрицей (9), ибо для системы с невырожденной квадратной матрицей $d - Ay \equiv 0$ и остается лишь первое слагаемое . Этот случай отдельно рассмотрен в $[1]$. Отличие вектора $d - Ay$, называемого в сейсмологии вектором невязки, от тождественного нуля обусловлено погрешностями в службе времени, в скоростном строении, в отчете времени вступления волн и т. п.

Из (11) видно, что вариация решения системы (9) зависит от матрицы возмущения $\delta(A)$ и вектора $\delta(d)$. Относительно последнего можно допустить, что его компоненты независимы и одинаково распределены с дисперсией σ_1^2. Хотя, строго говоря, компоненты вектора d согласно формулам (8) содержали вычисленные значения времен пробега волн $\psi_j(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})$ от очага $(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})$ до j-ой сейсмической станции, и погрешности в блочном скоростном строении могут привести к корреляции между погрешностями отдельных составляющих вектора d. Что касается погрешности вычисления элементов a_{kj} матрицы A, то она содержит погрешность вычисления производных через разностные формулы.

$$a_{1j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi} = \frac{\psi_j(\overline{\varphi} + \varepsilon, \overline{\lambda}, \overline{h}) - \psi_j(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \varphi^2} \approx$$

$$\frac{\psi_j(\overline{\varphi} + \varepsilon, \overline{\lambda}, \overline{h}) - \psi_j(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})}{\varepsilon} + \frac{\psi_j(\overline{\varphi} + \varepsilon, \overline{\lambda}, \overline{h}) - 2\psi_j(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h}) + \psi_j(\overline{\varphi} - \varepsilon, \overline{\lambda}, \overline{h})}{2\varepsilon} \qquad (12)$$

где ε - достаточно малая величина. Если первое слагаемое в правой части выражения (12) считать приближенным значением элемента a_{1j}, то второе слагаемое дает оценку погрешности вычисления производной через разностную формулу. Предположим, что компоненты погрешности матрицы A также независимы и одинаково распределены с дисперсией σ^2. Оценку величин σ^2 и σ_1^2 можно произвести для случая точного задания скоростного строения и для приближенного. В первом случае σ^2 можно сделать сколь угодно малым за счет уменьшения ε и увеличения разрядности вычисления прихода волны $\psi_j(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})$ из очага $(\overline{\varphi}, \overline{\lambda}, \overline{h})$ в j-ую сейсмическую станцию. Что касается σ_1^2, для этого случая она будет определяться службой времени в сейсмической сети и погрешностью отчета времени вступления.

Оценить дисперсии σ^2 и σ_1^2 для приближенного скоростного строения можно произвести путем вычислительного эксперимента, варьируя скоростное строение и вычисляя величины $a_{kj}^{(i)}$, где i - номер проверяемого скоростного строения

$$\sigma^2 = \frac{1}{16m}\sum_{k=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{m}\left(a_{kj}^{(i)} - \overline{a_{kj}}\right)^2 \qquad (13)$$

где m - число испытаний, $\overline{a_{kj}}$ - средняя для $a_{kj}^{(i)}$ величина. Можно было использовать для вычисления σ^2 экспериментальные оценки. Напомним, что

$$a_{1j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \varphi}, \quad a_{2j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \lambda}, \quad a_{3j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial h}, \quad a_{4j} = 1 \qquad (14)$$

величина a_{4j} от скоростного строения не зависит и, следовательно, ее соответствующая погрешность равна нулю. Что касается других компонент a_{kj} $(k = 1,2,3; \quad j = 1,2,3,\ldots,n)$, то они являются производными времен прихода по соответствующим направлениям. Поэтому даже при относительно значительном изменении скоростного строения, хотя времена прихода волн ψ_j менялись значительно, но их разности $\psi_j(\overline{\varphi}+\varepsilon,\overline{\lambda},\overline{h})-\psi_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})$ при фиксированном ε оставались почти неизменными. Поэтому и для приближенного скоростного строения можно ожидать, что σ^2 будет мало. Ошибки для компонента вектора правых частей в случае приближенного скоростного строения содержат ошибки времени прихода волн $\psi_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})$ и, они более чувствительны к изменению скоростного строения. Аналогично формуле (13) можно получить выражение для σ_1^2 с помощью вычислительного эксперимента.

$$\sigma_1^2=\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(d_j^{(i)}-\overline{d_j}\right)^2 \qquad (15)$$

где $\overline{d_j}$ - математическое ожидание для величины $d_j^{(i)}$ $(i=1,2,3,\dots,m)$.

Чтобы иметь представление о порядке величины σ_1^2 рассмотрим формулу

$$d_j=t_j-t_0-\psi_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h}) \qquad (16)$$

Скоростное строение, определяющее член $\psi_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})$ можно менять по-видимому в пределах 5%. Однако при этом недопустимы одновременные увеличения или уменьшения скорости во всех блоках. Это привело бы к заметным отклонениям от годографа, на основе которых построено скоростное строение. Поэтому скорости можно изменить таким образом, чтобы средняя скорость достаточно большого числа соседних блоков оставалась постоянной. В таком случае наибольшие отклонения времен прихода волн при изменении скоростного строения следует ожидать для небольших расстояний $r_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})$ между очагом и j- ой сейсмической станцией. При $r_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})\approx 100\text{км}$, $\psi_j(\overline{\varphi},\overline{\lambda},\overline{h})\approx 20\text{сек}$ и 5% будет содержать 1сек. Поэтому можно ожидать, что в численных экспериментах среднеквадратичная погрешность получится равной $\sigma_1=0{,}5\text{сек}$. Таким образом, для приближенного скоростного строения можно ожидать значения:

$$\sigma^2=0{,}1\frac{\text{сек}^2}{\text{град}^2},\qquad \sigma_1^2=0{,}25\text{сек}. \qquad (17)$$

Заметим, что в нижеприведенные значения матрицы моментов для ошибок результата входят вектора

$$r=d-Ay \qquad (18)$$

которые в основном обусловлены неточностью задания скоростного строения. Таким образом, в случае приближенного скоростного строения его неточность будет учитываться в корреляционной матрице результатов через величины σ^2, σ_1^2 *и* r.

Выражение для корреляционной матрицы $\Delta(y)$ ошибок результатов имеет вид [1]:

$$\Delta(y)=\left(\sigma^2y^Ty+\sigma_1^2\right)\left(A^TpA\right)^{-1}A^Tp^2A\left(A^TpA\right)^{-1}+\sigma^2\left(A^TpA\right)^{-2}r^Tp^2r-\sigma^2\left(L+L^T\right) \quad (19)$$

где $L=\left(A^TpA\right)^{-1}yr^Tp^2A\left(A^TpA\right)^{-1}$.

При $p=E$, где E- единичная матрица, получаем $L=0$, ибо $A^Tr=A^T(b-Ay)=0$, а следовательно, и $(b-Ay)^TA=0$. Поэтому частными случаями (19) будут: при $\sigma=0$

$$\Delta(y)=\sigma_1^2\left(A^TpA\right)^{-1}A^Tp^2A\left(A^TpA\right)^{-1} \qquad (20)$$

при $p=E$

$$\Delta(y)=\left(\sigma^2y^Ty+\sigma_1^2\right)\left(A^TA\right)^{-1}+\sigma^2r^Tr\left(A^TA\right)^{-2} \qquad (21)$$

при $\sigma=0$, $p=E$

$$\Delta(y)=\sigma_1^2\left(A^TA\right)^{-1} \qquad (22)$$

Квадратичная матрица четвертого порядка $\Delta(y)$ содержит 10 независимых величин, которые дают представление о погрешностях искомых величин y и их нужно добавить к приближенным значениям $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{h}, \bar{t}_0$, чтобы получить интерисующие нас величины φ, λ, h, t_0. Следовательно:

$$\Delta(y)_{11} = (\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\varphi) = \|\varepsilon_\varphi\|^2 \text{ или } \|\varepsilon_\varphi\| = \sqrt{\Delta(y)_{11}} \tag{23}$$

где ε_φ - погрешность определения величин. Аналогично:

$$\|\varepsilon_\lambda\| = \sqrt{\Delta(y)_{22}},\quad \|\varepsilon_h\| = \sqrt{\Delta(y)_{33}},\quad \|\varepsilon_{t_0}\| = \sqrt{\Delta(y)_{44}},\quad \|\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda\| = \Delta(y)_{12},\quad \|\varepsilon_\varphi, \varepsilon_h\| = \Delta(y)_{13},$$
$$\|\varepsilon_\varphi, \varepsilon_{t_0}\| = \Delta(y)_{14},\quad \|\varepsilon_\lambda, \varepsilon_h\| = \Delta(y)_{23},\quad \|\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{t_0}\| = \Delta(y)_{24},\quad \|\varepsilon_h, \varepsilon_{t_0}\| = \Delta(y)_{34}$$

Представляет определенный интерес корреляция $(\varepsilon_h, \varepsilon_{t_0})$, ибо в том случае, когда сейсмические станции расположены на любой окружности с центром в эпицентре (φ, λ), и строение региона горизонтально однородно, то величины h *и* t_0 становятся зависимыми в том смысле, что для любого значения глубины гипоцентра h найдется такое время в очаге $t_0(h)$, когда четырехмерный вектор $(\varphi, \lambda, h, t_0(h))$ будет строго удовлетворять нелинейной системе (1). Реально такая ситуация может возникнуть для слишком удаленных землетрясений от локальной сети сейсмических станций.

Литература

1. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. О естественных нормах для оценивания решения конечной вычислительной задачи. Журнал вычисл. матем. и матем. физ.. 1969. 9,№ 1.С. 3-13.
2. Месхия В.Ш., Алексидзе М.А., Аманаташвилн Я.Т., Гоцадзе О.Д., Барамидзе. Е.Л. Определение координат гипоцентра близких землетрясений по известному скоростному строению (на примере Кавказкого региона). В кн. «Алгоритмы и практика определений параметров гипоцентров на ЭВМ. М. Наука. 1983. С. 69-82.
3. Meskhia V. SH, Aleksidze M. A, Amanatashvili I.T.1996. Determination of local earthquakes coordinates by known velocity model (Caucasus region).", ORFEUS, Seismological Software Library: IASPEI PC shareware. Earthquake location of regional earthquakes.HYPO-GM.
4. Boyd T. M., Snoke J. A., Error estimates in some commonly used earthquake location programs, Earthquake Notes. Vol. 55. № 2. 1984.
5. Husebye E.S., Ruud B. O., Dainty A. M. (1998), Fast, robust and reliable epicenter determinations envelope processing of local network data, Bull. Seism. Soc. Am.. 88. Pp.284-290.
6. Kennett B.L.N., Ringdal F., Locating seismic events in a CTBT context, *Pageoph*, 158. Pp.7-18. 2001.
7. Bondar I., Myers S.C., Engdahl E. R., and Bergman E. (2004). Epicenter accuracy based on seismic network criteria. *Geophys. J. Int.* 156. no. 3. Pp483–496.
8. Flanagan M.P., Myers S.C., Koper K.D. (2007). Regional travel-time uncertainty and seismic location improvement using a three-dimensional a priori velocity model. *Bull. Seismolog. Soc. Am.*. 97. Pp. 804-825.
9. Myers S.C., Johannesson G., Hanley, W., 2007. A Bayesian hierarchical method for multiple-event seismic location, *Geophys. J. Int.* 171(3). Pp. 1049–1063.
10. Nolet G., A breviary of seismic tomography (Imaging the Interior of the Earth and Sun). Cambridge university press. 2008.
11. Pinsky V., Horiuchi S. Hypocenter location of mixed events in real-time processing systems. J. Seismol (2009) 13. Pp. 589–600
12. Myers S. C., Johannesson G., Hanley W. Incorporation of probabilistic seismic phase labels into a Bayesian multiple-event seismic locator *Geophys. J. Int.* (2009) 177. Pp. 193–204

სეისმოლოგიის შებრუნებულ ამოცანებში ცდომილებების შეფასება კორელაციური მატრიცების გამოყენებით

მესხია ვ. შ., ამანათაშვილი ი. ტ.

რეზიუმე

სტატიაში განხილულია მიწისძვრების ჰიპოცენტრის კოორდინატების განსაზღვრის სიზუსტის შეფასება ცდომილებათა კორელაციური მატრიცის გამოყენებით. მიდგომა ითვალისწინებს წრფივ შემთხვევას, ამიტომ გაწრფივებას ვახდენთ ტეილორის ფორმულის გამოყენებით.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ОШИБОК ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГИИ

Месхия В.Ш., Аманаташвили Я.Т.

Реферат

В статье рассмотрен метод оценки точности определения основных параметров очагов землетрясений с помощью построения корреляционных матриц ошибок входных и выходных данных. Метод позволяет предварительно оценить точность вычислений в зависимости от точности рассматриваемой скоростной модели региона. Теория предусматривает линейные случаи, поэтому линеализируем задачу по формуле Тейлора.

USE OF CORRELATION MATRIXES OF ERRORS FOR AN ESTIMATION OF INACCURECY IN INVERSE PROBLEMS OF SEISMOLOGY

Meskhia V. SH., Amanatashvili I.T.

Abstract

For the case of a defective reference model we propose to assess the accuracy of the hypocenter coordinates by constructing a correlation matrix for result errors which in turn is connected with the correlation matrix of errors of the input time data. The approach is based on linear theory so we have linearized the general system of equations using Taylor's formula.