О СИНГУЛЯРНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Капанадзе Д.В., Миндели П.Ш., Гванцеладзе Т.А., Чичинадзе В.К., Джаши Г.Г.

Введение

Известно, что единичная масса в начале координатной системы, единичный круг $\Omega_1 = \{x : |x| < 1\}$ с постоянной плотностью $\delta = 1/\pi$ во внешной области $R^2 - \Omega_1$ имеют равные потенциалы:

$$\ln\frac{1}{|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{|y|<1} \ln\frac{1}{|x-y|}dy, \qquad |x > 1|. \tag{1}$$

Кроме того, Эллипс

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \le 1\}, \qquad c^2 = a^2 - b^2,$$

с постоянной плотностью и отрезок (-c,c) с переменной плотностью ψ_1 во внешней области $R^2 - S_2$ имеют равные логаритмические потенциалы. Следовательно, Эллипс S_2 и отрезок (-c,c) с плотностью ψ_1 гравиметрически эквивалентные тела

$$\int_{S_2} \ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_{-c}^{c} \Psi_1(y) \ln\frac{1}{|x-y|}ds_y, \qquad x \in R^2 - S_2. \tag{2}$$

Введем некоторые определения. Пусть Q односвязная кусочно-гладкая ограниченная облась на плоскости R^2. Мы скажем, что для области Q с плотностью $\delta = const$ существует правильное сингулярное эквивалентное распределение, если выполняются следующие условия: [1].

I) Существует компакт $E \subset \overline{Q}$, для которого двухмерная мера Лебега равна нулю и $\Omega - E$ - связанное множество ($\Omega - E$ представляет область).

II) На компакте E существует обобщенная мера μ такая, что

$$\int_Q \delta \cdot \ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_E \ln\frac{1}{|x-y|}d\mu(y), \qquad x \in R^2 - Q.$$

(E, μ) называется правильное (свойство I) сингулярное эквивалентное распределение (свойство II)[1].

Равенства (1) и (2) означают, что единичная масса в центре круга для единичного круга есть правильное сингулярное эквивалентное распределение (СЭР), а отрезок (-c,c) с плотностью ψ_1 есть правильное сингулярное эквивалентное распределение для Эллипса [1].

Теперь рассмотрим произвольный многоугольник на плоскости R^2.

В этой статье рассматривается существование сингулярного эквивалентного распределения для многоугольника.

Сформулированную задачу поставил В.Н.Страхов [1], где определяется класс областей $\Pi(E_N, \delta, D)$, $\delta = const$ - постоянная плотность на многоугольнике E_N, D-односвязная ограниченная область, $E_N \subset D$, N-количество сторон многоугольника E_N.

Основная часть

Определим логарифмичекие потенциалы для ограниченной, кусочно-гладкой области Q

$$V^f(x) = \int_Q \ln\frac{1}{|x-y|} f(y)dy.$$

Потенциал простого слоя имеет вид

$$U^\psi(x) = \int_{\partial Q} \psi(y)\ln\frac{1}{|x-y|} dS_y,$$

где ∂Q - граница области Q, Ψ - ограниченная плотность на кусочно-гладкой кривой ∂Q.

Определение 1. Мы скажем, что сингулярное эквивалентное распределение (СЭР) есть регулярное, если множество $E = \bigcup_{k=1}^{n} e_k$, где e_k-кусочно-гладкая кривая. На E определена мера μ $(e_k \in C^\infty, \mu \in C^\infty(e_k))$.

Определение 2. Мы скажем, что СЭР есть квазирегулярное, если множество E состоит из регулярного СЭР и конечного числа изолированных точек.

Определение 3. Мы скажем, что СЭР есть естественное, если пересечение $E \cap \partial\Omega$ состоит только из особых точек внешнего потенциала V_1

$$V_1(x) = \int_Q \delta \cdot ln\frac{1}{|x-y|} dy, \quad x \in R^2 - \Omega, \tag{3}$$

где $\Omega \in \prod(E_N, \delta, D)$.

Определение 4. Точка $x \in \partial\Omega$ есть особая точка для V_1, если для некоторого $k(k = 1,2,3\ldots)$ производная потенциала V_1 порядка k в точке x_0 равна бесконечности $\left(V_1^{(k)}(x_0)\right) = \infty$.

Заметим, что в случае области $\Omega \in \prod(E_N, \delta, D)$ особые точки для **потенциала**

$$V_1(x) = \int_Q \delta \cdot ln\frac{1}{|x-y|} dy, \quad (\delta = const),$$

есть только негладкие точки $\partial\Omega$, а для гладкой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует конечная производная любого порядка $k = 1,2,3\ldots$

Теорема 1. Область $\Omega \in \prod(E_N, \delta, D)$ не имеет естественного регулярного СЭР. Кроме того, область Ω не имеет, также, естественного квазирегулярного СЭР.

Доказательство. Сначала рассмотрим квазирегулярное СЭР. Допустим, что существует естественное квазирегулярное СЭР, т.е., что

$$\mu(F) = \sum_1^{N_1} \int_{e_k \cap F} \Psi_k(y)dS_y + \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k \delta_{x_k}(F),$$

где $\Psi_k \in C^\infty(e_k)$, а δ_{x_k}-мера Дирака, которая сосредоточена в точке $x_k(k = 1,2,3,\ldots N_2)$. Итак

$$\int_\Omega \ln\frac{1}{|x-y|} dy = \int_E \ln\frac{1}{|x-y|} d\mu(y), \quad x \in R^2 - \Omega. \tag{4}$$

Повернем координатную систему так, чтобы некоторая сторона I_1 многоугольника была бы параллельной оси OX_2. Из равенства (4) получаем:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial V^{f}(x)}{\partial x_2}dx=\int_{E}\frac{\partial V^{f}(x)}{\partial x_2}d\mu(x), \qquad f\in C(S), \tag{5}$$

$$S=\{x:R_1<|x|<R_2\}, \qquad \overline{\Omega}\subset\{x:|x|<R_1\}=S_1.$$

По формуле Грина-Гаусса из (5) получаем

$$\int_{\partial\Omega-I_1}V^{f}(x)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x=\int_{E}\frac{\partial V^{f}(x)}{\partial x_2}d\mu(x)=$$

$$\int_{E}\left(\int_{S}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial x_2}f(y)dy\right)d\mu(x)=\int_{E}W^{f}(x)d\mu(x)$$

где

$$W^{f}(x)=\int_{S}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial x_2}f(y)dy, \qquad f\in C(S).$$

Следовательно

$$\int_{\partial\Omega-I_1}V^{f}(x)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x=\sum_{k=1}^{N_1}\int_{e_k}W^{f}(x)\psi_k(x)dS_x+\sum_{k=1}^{N_2}\beta_k W^{f}(x_k), \tag{6}$$

где $E=\bigcup\limits_{1}^{N_1}e_k$, e_k-гладкая кривая, $x_k\in E(k=1,2,3,\dots N_2)$ изолированные точки множества.

Интеграл на стороне I_1 равняется нулю, так как $\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)=0,\ x\in I_1$. Рассмотрим некоторую изолированную точку x_1 и обозначим ее через z_1. Допустим $\sigma_1=\{x:|x-z_1|=r\},\quad 0<r<\varepsilon$. Возьмем среднее распределение σ_1 на круге:

$$\psi_r(g)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\sigma_1}g(y)dS_y=\int_{\sigma_1}g(y)\psi_r(y)dS_y.$$

Из равенства (5) получаем

$$\int_{\partial\Omega-I_1}\Gamma(x,y)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x=\sum_{k=1}^{N_1}\int\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial x_2}\Psi_k(x)dS_x+\sum_{k=1}^{N_2}\beta_k\left(\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial x_2},\delta_{x_k}\right),\ y\in S. \tag{6}$$

Где

$$\Gamma(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}.$$

Нетрудно увидеть, что равенство (6) выполняется также на множестве:

$$[(\overline{\Omega}-I_1)-E]\cup[(S_1\cup S)-E].$$

Значит равенство (6) справедливо также, если вместо $f\in C(S)$ напишем плотность Ψ_r. Следовательно

$$\int_{\partial\Omega-I_1}U^{\Psi_r}(x)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x=\sum_{k=1}^{N_1}\int_{e_k}W^{\Psi_r}(x)\Psi_k(x)dS_k+\sum_{k=1}^{N_2}\beta_k W^{\Psi_r}(x_k). \tag{7}$$

Перейдем к пределу когда $r\to 0$, получаем

$$\lim_{r\to 0}\left|\int_{\partial\Omega - l_1} U^{\Psi_r}(x)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x\right| < \infty, \qquad \lim_{r\to 0}\left|\int W^{\Psi_r}(x)\Psi_k(x)dS_x\right| < \infty,$$

$$\lim_{r\to 0}\left|W^{\Psi_r}(x_1)\right| = \lim_{r\to 0}\left|W^{\Psi_r}(z_1)\right| = \infty.$$

Получается противоречие. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, квазирегулярное СЭР не существует.

Теперь покажем, что для многоугольника Ω регулярное СЭР не существует.

Допустим противное, т.е., что

$$\int_\Omega \ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_E \Psi(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy, \qquad x \in R^3 - \Omega. \tag{8}$$

Аналогично тому, как это было раньше, получаем:

$$\int_{\partial\Omega - l_1} V^f(x)\cos(\nu_x\hat{\ }x_2)dS_x = \int_E W^f(y)\Psi(y)dS_y, \qquad f \in C(S). \tag{9}$$

Рассмотрим гладкую точку $x_0 \in e_{k_1} \subset E$ для которой $\Psi(x_0) \neq 0$. Очевидно, что такая точка существует. В противном случае $\Psi(x) \equiv 0$.

Из равенства (9) получаем

$$\left(\varphi(y) = \cos(\nu_y\hat{\ }y_2), y \in \partial\Omega - l_1\right),$$

$$\int_{\partial\Omega - l_1} \Gamma(x,y)\varphi(y)dS_y = \int_E \frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial x_2}\psi(y)dS_y, \qquad x \in (\overline{\Omega} - E) \cup S_1. \tag{10}$$

Ясно, что U^φ-непрерывный потенциал на области Ω, значить на множестве $E \cap \Omega$. Предположим, что $\cos(\nu_{x_0}\hat{\ }x_2) \neq 0$. (В противном случае $\cos(\nu_{x_0}\hat{\ }x_1) \neq 0$).

Рассмотрим следующее выражение для потенцила U^Ψ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial U^\Psi}{\partial x_2}\bigg|_E^+ - \lim_{x\to x_0}\frac{\partial U^\Psi}{\partial x_2}\bigg|_E^- = 2\pi\Psi(x_0)\cos(\nu_{x_0}\hat{\ }x_2). \tag{11}$$

Для потенциала V^φ имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial U^\varphi(x)}{\partial x_2}\bigg|_E^+ - \lim_{x\to x_0}\frac{\partial U^\varphi(x)}{\partial x_2}\bigg|_E^- = 0. \tag{12}$$

Из (10), (11), и (12) получаем противоречие. Полученное противоречие доказывает теорему.

Справедливо сдедующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\Omega \in C^\infty$-ограниченная область. Предположим, что граница $\partial\Omega$ содержит отрезок прямой, тогда для Ω не существует естественного регулярного и естественного квазирегулярного СЭР.

Теорема 3. Пусть Ω произвольный многогранник из R^3, тогда для Ω не существует естественное регулярное и естественное квазирегулярное СЭР.

Доказанное утверждение справедливо для любой ограниченной области $\Omega \in C^\infty$, если граница $\partial\Omega$ содержит часть некоторой плоскости.

Для доказательства используются ньютоновские потенциалы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для произвольного многоугольника с постоянной плотностью не существует как естественного регулярного, так и естественного квазирегулярного СЭР.
2. Утвержденная теорема обобщена для любой односвязной кусочно-гладкой области Q, если граница области ∂Q содержит некоторый отрезок прямой.
3. В трехрмерном случае используются ньютоновские потенциалы и для любого многогранника с постоянной плотностью доказывается, что не существуют ни естественное регулярное и ни естественное квазирегулярное СЭР.
4. Утвержденная теорема обобщена в трехмерном пространстве для любой односвязной кусочно-гладкой области Ω , если граница области $\partial\Omega$ содержит некоторую часть плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Страхов В.Н. Нерешенные проблемы математической теории плоской задачи гравиметрии и магнитомерии. || Изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, №8, с. 3-28.
2. Страхов В.Н. Некоторые примеры эквивалентности и слабой единственности плоской обратной задаче потенциала. || Изв. АН СССР, Физика Земли, 1973, № 5, с. 39-62.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М. Наука, 1979, с. 318.

სინგულარული ეკვივალენტური განაწილების შესახებ ნებისმიერი მრავალკუთხედისათვის

ჯ. კაპანაძე, პ. მინდელი, თ.გვანცელაძე, ვ. ჭიჭინაძე, გ. ჯაში

რეზიუმე

განხილულია სინგულარული ეკვივალენტური განაწილების ამოცანა ნებისმიერი მრავალკუთხედისათვის. აღნიშნული ამოცანა დასმული იყო ვ.ნ. სტრახოვის მიერ სტატიაში [1].

დამტკიცებულია, რომ მრავალკუთხედისათვის მუდმივი სიმკვრივის შემთხვევაში არ არსებობს არც ბუნებრივი რეგულარული და არც ბუნებრივი კვაზირეგულარული სინგულარული ეკვივალენტური განაწილება.

დამტკიცებული თეორემა განზოგადებულია ნებისმიერი უბან-უბან გლუვი მარტივადბმული Ω არისათვის, თუ საზღვარი $\partial\Omega$ შეიცავს წრფის რაიმე მონაკვეთს.

ანალოგიური თეორემა სამართლიანია სამგანზომილებიან შემთხვევაში ნებისმიერი მრავალწახნაგასთვის.

О сингулярных эквивалентных распределениях для произвольного многоугольника

Д. В. Капанадзе, П.Ш. Миндели, Т.А. Гванцеладзе, В.К. Чичинадзе, Г.Г. Джаши

Реферат

Рассматривается задача о сингулярных эквивалентных распределениях (СЭР) для произвольного многоугольника.

Доказывается, что для многоугольника естественное регулярное СЭР не существует. Устанавливается также, что естественное квазирегулярное СЭР не существует.

Доказанное утверждение обобщается для области Ω если граница $\partial\Omega$ содержит отрезок прямой линии.

В заключение полученные результаты обобщаются в трехмерном пространстве для ньютоновских потенциалов.

On singular equivalent distributios for an arbitrary poligon

D.V. Kapanadze, P.Sh. Mindeli, T.A. Gvantseladze, V. K. Chichinadze, G.G. Jashi

Abstract

The problem on singular equivalent distributions (SED) for arbitrary polygon posed by V.N. Strakhov [1] is considered

It is proved that for a polygon natural regular SED does not exist. It is also established that the natural quasi-regular SED does not exist.

The last assertion is generalized for any simply connected piece-wise smooth Ω, if the boundary $\partial\Omega$ contains a segment of a straight line.