მიხეილ ნოდიას გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ტ. X, 2008
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, vol. LX , 2008
Труды Института геофизики им. М. Нодиа, т. LX, 2008

ОДИН ПРИЗНАК ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Капанадзе Д. В.

Институт геофизики им. Михаила Нодиа, 0193, Тбилиси, ул. М. Алексидзе, 1,
E-maill geo@ig-geophyzics.ge

Решение обратной задачи теории потенциала имеет большое теоретическое и практическое значение. Практическая важность обратных задач настолько значительна, что они оказались среди актуальных задач современного математического анализа.

Впервые единственность её решения в классе звездных областей постоянной плотности была доказана П. С. Новиковым [1], результаты которого расширены в работах [2-7].

В этой статье доказывается единственность решения обратной задачи для односвязных кусочно-гладких областей, если на внешней границе $\partial\Omega_\infty(\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2)$ существует гладкая точка пересечения кривых $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Предполагается, что гладкие части границы области принадлежает классу $C^{(2,\alpha)}0<\alpha\le 1$, а плотность $\mu = const$. В конце заметки даётся метод доказательства полученных результатов в случае плотности $\mu\in C^1(\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2)$, $\mu(x)>0 \quad x\in\bar\Omega$, которая не зависит от одной из переменных. Определим объёмные потенциалы и потенциалы простого слоя для ограниченной кусочно-гладкой области Ω

$$V^g(x)=\int_\Omega \Gamma(x,y)g(y)dy,\qquad U^\psi(x)=\int_{\partial\Omega}\Gamma(x,y)\Psi(y)ds,$$

где $\partial\Omega$ - граница области Ω, $g\in L_1(\Omega)$, $\psi\in L_1(\partial\Omega)$,

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & n=2\\[2mm] \dfrac{1}{|x-y|} & n=3\end{cases}$$

Через Ω_∞ обозначается связная компонента дополнения $R^2-\bar\Omega$ (или $R^3-\bar\Omega$), которая содержит бесконечно удалённую точку ($\infty\in\Omega_\infty$).Через ν_x обозначается внешняя нормаль в гладкой точке $x\in\partial\Omega$, $(\nu_x\hat{\ },x_2)$ – угол между ν_x и оси ox_2, – $\emptyset$ пустое множество, $C_i \quad i=1,2,\ldots$ – положительные постоянные.

Введём следующее

Определение 1. Пусть Ω_1, Ω_2 – гладкие ограниченные односвязные области на плоскости R^2. Мы скажем, что границы $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$, пересекаются в точке, если касательные прямые в точке $x_0\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$ не совпадают.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* Ω_1, Ω_2 – *гладкие односвязные ограниченные области на плоскости* R^2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. *Предположим, что на внешней границе* $\partial\Omega_\infty$ *существует точка пересечния кривых* $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$. *Тогда потенциалы областей* Ω_1, Ω_2 *не совпадают на* Ω_∞.

Доказательство. Допустим противное, т.е. что

$$\int_{\Omega_1} \ln\frac{1}{|x-y|}dy = \int_{\Omega_2}\frac{1}{|x-y|}dy, \quad x \in R^2 - \overline{\Omega} \tag{1}$$

Пусть $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$, $x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0 + \varepsilon_1$

$$\sigma = \left\{x : x \in \partial\Omega_\infty |x - x_0| < \varepsilon\right\} \quad \varepsilon_1 \le \varepsilon,$$

где ε – достаточно малое число. Из равенства (1) имеем, что

$$\int_{\Omega_1}\frac{\partial U^\varphi}{\partial x_2}dx = \int_{\Omega_2}\frac{\partial U^\varphi}{\partial x_2}dx, \quad \varphi \in C(\sigma), \quad U^\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

По формуле Гаусса-Остроградского получаем

$$\int_{\partial\Omega_1} U^\varphi(x)\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)ds = \int_{\partial\Omega_2} U^\varphi(x)\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)ds, \quad \varphi \in C(\sigma)$$

Следовательно

$$\int_\sigma U^\psi(x)\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)ds = \int_{\partial\Omega_2} U^\varphi(x)\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)ds - \int_{\partial\Omega_1 - \sigma} U^\varphi(x)\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)ds, \tag{2}$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \partial\Omega_1, \\ -\varphi(x) & x \in \partial\Omega_2. \end{cases}$$

По условию теоремы касательные прямые l_1, l_2 в точке $x_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ не совпадают. Без уменьшения общности можно предполагать, что биссектриса угла $l_1 x_0 l_2$ параллельна оси ox_2. Введём норму

$$\left\|U^\psi\right\| = \left\|U^\varphi\right\|_{\left(C^1(\partial\Omega_1)\right)^*} + \left\|U^\varphi\right\|_{\left(C^1(\partial\Omega_2)\right)^*}.$$

Очевидно, что уравнение окрестности имеет вид $x_2 = \tau(x_1)$, $x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0 - \varepsilon_1$. Кроме того

$$\cos\left(\nu^\wedge x_2\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left[\tau' x_1\right]^2}},$$

$$\left\|\frac{\partial\cos\left(\nu^\wedge x_2\right)}{\partial x_1}\right\|_C = \infty$$

В частности, рассмотрим следующие распределения [8] (обобщенную функцию)

$$\delta = \pm\frac{1}{x_1 - y_1}\left[\delta_{x_1} - \delta_{y_1}\right] \times \delta_{x_2}, \quad \left(\delta_{x_i}, f(t)\right) = f(x_i), \quad f \in C\left(R^1\right)$$

$$x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0, \quad x_1^0 < y_1 < x_1^0 + \varepsilon_1, \quad (x_1, x_2) \in \sigma, \quad (y_1, y_2) \in \sigma.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ y_1 \to y_1^0}} \left\{\delta, \cos\left(\nu^\wedge x_2\right)\right\} = \infty,$$

$$\sup_{\|U^\varphi\|\le 1}\left|\int_{\partial\Omega_1-\sigma} U^\varphi(x)\cos(\nu^\wedge x_2)ds\right|<\infty, \qquad (3)$$

$$\sup_{\|U^\varphi\|\le 1}\left|\int_{\partial\Omega_2} U^\varphi(x)\cos(\nu^\wedge x_2)ds\right|<\infty.$$

Из (2) и (3) получается противоречие.

Теорема даказана.

Теперь рассмотрим кусочно-гладкие области, $x_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$

Теорема 2. *Путь Ω_1, Ω_2 – кусочно-гладкие односвязные ограниченные области на плоскости R^2, $\Omega_2 = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Предположим, что на внешней границе $\partial\Omega_\infty$ существует гладкая точка x_0 (для Ω_1 и Ω_2) пересечния кривых $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$. Тогда потенциалы областей Ω_1, Ω_2 не совпадают на Ω_∞.*

Для доказательство теоремы 2 нам понадобиться одна

Лемма. *Путь* $\varphi \in C(\sigma)$, $\sigma = \left\{x : |x-x_0| \le \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cap \partial\Omega_\infty$,· $\omega = \left\{x : |x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Тогда

$$\|\varphi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*} \le C_1 \|U^\varphi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*},$$

где C_0^1 – финитные функции в шаре из класса $C^1(\overline{\omega})$.

Доказательство Леммы. Для любой функции $f \in C_0^3(\omega)$ имеет

$$\int_\sigma \varphi(x) f(x) ds = \frac{1}{4\pi}\int \varphi(x) U^{-\Delta f}(x) ds = -\frac{1}{4\pi}\int_\omega U^\varphi(x)\Delta f(x) dx$$

Значит

$$\sup_{\|f\|_{C^3}\le 1}\left|\int_\sigma \varphi(x) f(x) ds\right| = \|\varphi\|_{\{C^3(\sigma)\}^*} \le$$

$$\le C_1 \sup_{\|g\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}\le 1}\left|\int_\omega U^\varphi g(z) dx\right| = C_1 \|U^\varphi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*}.$$

Теперь определим норму

$$\|U^\varphi\| = \|U^\varphi\|_{\{C_0^1(\omega)\}^*} + \|U^\varphi\|_{\{C^1(\sigma_1)\}^*} + \|U^\varphi\|_{\{C^1(\sigma_2)\}^*},$$

где

$$\sigma_1 = \{x : x \in \partial\Omega_1 \ \ |x-x_0| \le \varepsilon\},$$
$$\sigma_2 = \{x : x \in \partial\Omega_2 \ \ |x-x_0| \le \varepsilon\}.$$

Для доказательства теоремы 2 из равнества потенциалов имеем

$$\int_{\sigma_3} U^\psi(x)\cos(\nu^\wedge x_2) ds = \int_{\partial\Omega_2-\sigma_2} U^\varphi(x)\cos(\nu^\wedge x_2) ds -$$
$$- \int_{\partial\Omega_1-\sigma_1} U^\varphi(x)\cos(\nu^\wedge x_2) ds$$

Здесь $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \sigma \cap \partial\Omega_1, \\ -\varphi(x) & x \in \sigma \cap \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sup_{x\in\partial\Omega_1-\sigma_1}\left|U^{\varphi}(x)\right|\le C_2\|\varphi\|_{L^1(\sigma)}^{*},$$

$$\sup_{x\in\partial\Omega_2-\sigma_2}\left|U^{\varphi}(x)\right|\le C_2\|\varphi\|_{L^1(\sigma)}^{*},$$

$$\sup_{\|U^{\psi}\|\le 1}\left|\int_{\sigma_1}U^{\psi}(x)\cos(\nu\,\hat{}\,x_2)\,ds\right|=\infty.$$

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Справедливо обобщение доказанной теоремы. Сначала введём

Определение 2. Пусть Ω_1, Ω_2 – кусочно гладкие области. Мы скажем, что гладкая точка $x_0\in\partial\Omega_1\bigcap\partial\Omega_2$ является точкой пересечения кривых $\partial\Omega_i$ (i=1,2) порядка (n+1), если x_0 единственная точка кривых $\partial\Omega_i$ (i=1,2) в окрестности $\sigma_0=\{x:|x-x_0|<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ и кривая $\sigma=\sigma_0\bigcap\partial\Omega_\infty$ $(\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2)$ содержит часть каждой кривой $\partial\Omega_i(i=1,2)$. Пусть далее, уравнение кривой $\sigma=\sigma_0\bigcap\partial\Omega_\infty$ в локальной координатной системе $x_2=\tau(x_1)$ удовлетворяет условиям $\tau\in C^{(n)}$, $\tau\notin C^{(n+1)}$. $\left(\tau^{(n+1)}\right.$ имеет разрыв в точке $x_1^0, x_0=\left(x_1^0,x_2^0\right)\Big)$.

Теорема 3. *Пусть* Ω_1, Ω_2, – *кусочно-гладкие односвязные ограниченные области на* R^2. *Каждая гладкая часть кривой* $\partial\Omega_i(i=1{,}2)$ *принадлежит классу* $C^{(n+2,\alpha)}$ *и на* $\partial\Omega_\infty$ *существует точка пересечния кривых* $\partial\Omega_i(i=1{,}2)$ *порядка* (n + 1). *Тогда потенциалы областей* $\partial\Omega_i(i=1{,}2)$ *не совпадают на* Ω_∞.

Аналогичное утверждение справедливо в пространстве R^3 для ньютоновских потенциалов $(\mu=const)$.

Теперь рассмотрим плотность $\mu\in C^1(\bar\Omega),\mu(x_1,x_2)=\mu(x_1),\mu(x)>0$, $x\in\bar\Omega,\bar\Omega=\bar\Omega_1\bigcup\bar\Omega_2$

Докажем теорему 1 в случае плотности μ. Пусть

$$\int_{\Omega_1}\mu(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy=\int_{\Omega_2}\mu(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy\quad x\in R^2-\Omega$$

Отсюда имеем, что

$$\int_{\Omega_1}\frac{\partial(U^{\varphi}\mu)}{\partial x_2}dx=\int_{\Omega_2}\frac{\partial U^{\varphi}\mu}{\partial x_2}dx,$$

$$\int_{\partial\Omega_1}U^{\varphi}\mu\cos(\nu\,\hat{}\,x_2)ds=\int_{\partial\Omega_2}U^{\varphi}\mu\cos(\nu\,\hat{}\,x_2)ds.$$

Сделаем поворот координатной системы, после которого биссектриса угла $l_1x_0l_2$ будет параллельна оси ox_2. После этого достаточно повторить рассуждения теоремы 1.

В случае R^3 справедлива.

Теорема 4. *Пусть* Ω_1, Ω_2, *гладкие односвязные ограниченные области из* R^3, $\Omega=\Omega_1\bigcup\Omega_2$. *Пусть далее, существует гладкая точка* $x_0\in\partial\Omega_\infty$ *такая, что касательные плоскости в точке* x_0 *для* $\partial\Omega_1$ *и* $\partial\Omega_2$ *не совпадают. Тогда потенциалы областей* Ω_1, Ω_2 *не совпадают на* $\Omega_\infty(\mu\equiv const)$.

Доказательство. Обозначим касательные плоскости через P_1 и P_2, которые создают двугранный угол $P_1x_0P_2$. Сделаем линейное преобразование (вращение в пронстранстве) после которого биссектор двугранного угла $P_1x_0P_2$ и координатная плоскость x_0ox_3 _ параллельные плоскости. Рассмотрим окрестность точки $x_0 \in \partial\Omega_\infty$.

$$\sigma_0 = \{x : |x - x_0| < \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega_\infty\}$$

Уравнение окрестности σ_0 имеет вид $x_3 = \tau(x_1, x_2)$. Кроме того

$$\cos(\nu^\wedge x_3) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2}}.$$

Допустим противное, т.е. что

$$\int_{\Omega_1}\frac{dy}{|x-y|} = \int_{\Omega_2}\frac{dy}{|x-y|} x \in \Omega_\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega_1}\frac{\partial U^\varphi}{\partial x_3}dx = \int_{\Omega_2}\frac{\partial U^\varphi}{\partial x_3}dx, \varphi \in C(\sigma_0), U^\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$$

Следовательно

$$\int_{\partial\Omega_1} U^\varphi(x)\cos(\nu_x^\wedge x_3)ds = \int_{\partial\Omega_2} U^\varphi(x)\cos(\nu_x^\wedge x_3)ds.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ y_1 \to x_1^0}}\left\|\left[\delta, \cos(\nu_x^\wedge x_3)\right]\right\| = \infty, \quad \delta = \pm\frac{1}{x_1 - y_1}\left[\delta_{x_1} - \delta_{y_1}\right] \times \delta_{x_2} \times \delta_{x_3},$$

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad x_1 < x_1^0 < y_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \sigma_0.$$

После этого, для доказательства теоремы достоточно использовать рассуждения теоремы 1.

Нетрудно видеть, что теорема 4 сохраняет силу в случае кусочно-гладких односвязных областей для плотности $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu(x_1x_2x_3) = \mu(x_1, x_2)$ $\mu(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}, \overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$.

Литература

1. Новиков П. С. О единственности решения обратной задачи теории потенциала. *ДАН СССР*, 1938, т. 18, №3, с. 165-168.
2. Сретенский Л. Н. О единственности определения формы притягивающегося тела по значениям его внешнего потенциала. – *ДАН СССР*, 1954, т. 99, №1, с. 20-22.
3. Шашкин Ю. А. О единственности обратной задачи теории потенциала. – *ДАН СССР*, 1957, т. 115, №1, с. 64-66.
4. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала. – *Математические заметки*, т. 1973, 14, №5, с. 755-767.
5. Чередниченко В. Г. Обратные задачи логарифмического потенциала. Дисс. ... К. Ф. - М. Н.: НГУ, 1973.
6. Страхов В. Н., Бродский М. А. О единственности обратной задаче логарифмического потенциала. – *Изв. АН ССС, Физика Земли*, 1985, №6, с. 27-47.
7. Капанадзе Д. В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала. – *Сообщения А. Н. Грузии*, 1992, т. 145, №1, с. 78-80.
8. Владимиров В. С. Обобщенные Функции в математической физике. *М.*: *Наука*, 1979, 315 с.

პოტენციალთა თეორიის შებრუნებული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის ნიშანი

კაპანაძე ჯ.ვ.

რეზიუმე

სტატიაში დამტკიცებულია პოტენციალთა თეორიის შებრუნებული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა, როდესაც გარე საზღვარზე $\partial\Omega_\infty(\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2)$ არსებობს $\partial\Omega_1$ და $\partial\Omega_2$ წირების გადაკვეთის წერტილი. დამტკიცებული თეორემა განზოგადებულია R^3 სივრცეში, ხოლო შემდეგ მიღებულია ანალოგიური შედეგი სიმკვრივისათვის μ, $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu(x)>0$, $x \in \overline{\Omega}$, რომელიც არ არის დამოკიდებული ერთ-ერთ ცვლადზე.

ОДИН ПРИЗНАК ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Капанадзе Д. В.

Реферат

В статье доказывается теорема единственности решения обратной задачи теории потенциала если на внешней границе $\partial\Omega_\infty\,(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ существует точка пересечения кривых $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$. Доказанное утверждение обобщается в пространстве R^3.

ON UNIQUESS OF THE INVERSE PROBLEM OF THE POTENTIAL THEORY

D. Kapanadze

Abstract

The uniqueness of the solution to the inverse problem of the potential theory i sproved when on the outer boundary $\partial\Omega_\infty(\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2)$ there exists an intersection point of the curves $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$. The theorem is generalized to the spare R^3. Then an analogous result is obtained for a density μ, $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu(x)>0$, $x \in \overline{\Omega}$, which does not depend on one of the variables.