ᲡᲐᲥᲐᲠᲗᲕᲔᲚᲝᲡ ᲡᲡᲠ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲐᲙᲐᲓᲔᲛᲘᲘᲡ ᲛᲝᲐᲛᲑᲔ. ტ. II, № 8, 1941
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, Т. II, № 8, 1941
MITTEILUNGEN d. AKADEMIE d. WISS. d. GEORGISCHEN SSR, Bd. II, Nr. 8, 1941

МАТЕМАТИКА

ИЛЬЯ ВЕКУА

О ПРИВЕДЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К УРАВНЕНИЯМ ФРЕДГОЛЬМА

Настоящую заметку надо рассматривать как дополнение к моим предыдущим работам [1, 2]. Поэтому мы здесь будем пользоваться, без дополнительных разъяснений, понятиями и обозначениями, введенными нами в работе [2].

В упомянутых работах доказано, что сингулярное интегральное уравнение

$$A\varphi \equiv a(x)\,\varphi(x) - \int\limits_L \frac{K(x,\ y)}{y-x}\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{A}$$

эквивалентно одному уравнению Фредгольма, если индекс n этого уравнения $\geqq 0$ (см. [2], теоремы 1, 2). Случай же отрицательного индекса, $n<0$, выделяется особо, так как в этом случае уравнение (A) эквивалентно уравнению Фредгольма,

$$A^*\varphi \equiv \varphi(x) - \int\limits_L K_n^*(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy = f_n^*(x) \tag{A*}$$

и дополнительным соотношениям

$$\int\limits_L \delta_k(t)\,\varphi(t)\,dt = \int\limits_L t^k\gamma_n(t)\,f(t)\,dt,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,-n-1 \tag{1}$$

(см. [2], теорема 3). Следовательно, особенность этого случая ($n<0$) состоит в том, что уравнение (A) приводится, вообще говоря, не к одному уравнению Фредгольма, как в случае $n \geqq 0$, а к системе функциональных уравнений Фредгольма (A*) и (1), из которых (A*)—уравнение Фредгольма второго рода, а (1)—уравнения Фредгольма первого рода.

Мы ниже доказываем, что при помощи одного функционального преобразования всегда можно заменить систему уравнений (A*) и (1) одним уравнением Фредгольма второго рода и несколькими условиями, содержащими функцию $f(x)$, но не содержащими больше искомой функции $\varphi(x)$.

Пусть среди функций

$$\delta_0(x),\ \delta_1(x),\ \ldots,\ \delta_m(x),\quad m=-n-1,$$

имеются h линейно независимых функций

$$\delta_{k_1}(x),\ \delta_{k_2}(x),\ \ldots,\ \delta_{k_h}(x)$$

$$(0 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_h \leqq m).$$

Следовательно, остальные $m-h=\nu$ функции являются их линейными комбинациями, т. е.

$$C_{j0}\delta_0(x)+C_{j1}\delta_1(x)+\cdots+C_{jm}\delta_m(x)=0 \tag{2}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

где C_{jk}—определенные постоянные.

Поэтому ясно, что уравнения (1) эквивалентны совокупности уравнений

$$\int\limits_L \delta_{k_j}(t)\,\varphi(t)\,dt=\int\limits_L t^{k_j}\gamma_n(t)\,f(t)\,dt \tag{3}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ h),$$

и условий

$$\int\limits_L f(t)\,\varkappa_j(t)\,dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu, \tag{4}$$

где

$$\varkappa_j(x)=(C_{j0}+C_{j1}x+\cdots+C_{jm}x^m)\,\gamma_n(x)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

Пусть s—дуга, соответствующая точке x. Введем теперь новые функции $\chi_j(s)$ следующим образом:

$$\chi_j(s)=[B_{j1}\delta_{k_1}(x)+B_{j2}\delta_{k_2}(x)+\cdots+B_{jh}\delta_{k_h}(x)]\,x'(s)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ h),$$

$$\int\limits_L \chi_j(s)\,\overline{\chi_k(s)}\,ds=\begin{cases}0, & j\neq k\\ 1, & j=k,\end{cases} \tag{5}$$

где B_{jk}—постоянные, причем детерминант $|B_{jk}|\neq 0$.

Тогда система (3), очевидно, может быть заменена эквивалентной ей системой уравнений

$$\int_L \chi_j(s)\,\varphi(x)\,ds = \int_L \varkappa_{\nu+j}(x)\,f(x)\,dx = f_j \tag{3'}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, h),$$

где

$$\varkappa_{\nu+j}(x) = (B_{j1}x^{\lambda_1} + \cdots + B_{jh}x^{\lambda_h})\,\gamma_n(x).$$

Положим

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{h} f_j\bar{\chi}_j(s) + \omega(x) - \sum_{j=1}^{h} \bar{\chi}_j(s)\int_L \omega(t)\,\chi_j(\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где σ — дуга, соответствующая t.

Это выражение, какова бы ни была функция $\omega(x)$, всегда удовлетворяет, в силу (5), уравнениям (3'); очевидно, что искомая функция $\varphi(x)$, которая кроме уравнения (A*) удовлетворяет также соотношениям (3'), необходимо имеет вид (6). Выражение (6) можно еще записать так:

$$\varphi(x) = \omega(x) - \int_L \lambda(x, t)\,\omega(t)\,dt + \int_L \varkappa(x, t)\,f(t)\,dt, \tag{7}$$

где

$$\lambda(x, t) = \sum_{j=1}^{h} [\bar{\chi}_j(s)\,\chi_j(\sigma)]\,t'(\sigma),$$

$$\varkappa(x, t) = \sum_{j=1}^{h} [\bar{\chi}_j(s)\,\varkappa_{\nu+j}(t)]\,t'(\sigma).$$

Подставляя теперь (7) в (A*), получим

$$\omega(x) - \int_L \Omega(x, y)\,\omega(y)\,dy = \chi(x), \tag{A**}$$

где

$$\Omega(x, y) = \lambda(x, y) + K_n^*(x, y) - \int_L K_n^*(x, t)\,\lambda(t, y)\,dt,$$

$$\chi(x) = f_n^*(x) - \int_L f(t)\left[\varkappa(x, t) - \int_L K_n^*(x, y)\,\varkappa(y, t)\,dy\right]dt.$$

Таким образом, при помощи функционального преобразования (7), система уравнений (A*) и (1), эквивалентная уравнению (A), приводится к уравнению Фредгольма (A**) и условиям (1). В частности, если последние условия не выполнены, то, очевидно, сингулярное уравнение (A) неразрешимо.

Если же условия (4) выполнены, то тогда решение уравнения (A) эквивалентно решению уравнения Фредгольма (A^{**}) в том смысле, что эти уравнения одновременно разрешимы или неразрешимы, и в случае разрешимости—из решения уравнения (A^{**}) получается при помощи (7), решение уравнения (A).

Полученный результат мы можем еще сформулировать в следующем виде:

Если $n<0$ и условия (4) не выполнены, то тогда уравнение (A) неразрешимо. Если же $n<0$ и условия (4) выполнены, то тогда, производя функциональное преобразование (7), мы приходим к такому сингулярному уравнению, которое эквивалентно одному уравнению Фредгольма (A^{**}). При этом заметим, что функциональное преобразование (7) не меняет индекса сингулярного уравнения.

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 28.10.1941)

მათემატიკა

ილია ვეკუა

სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მიყვანის შესახებ ფრედჰოლმის განტოლებამდე

ამ შრომაში, რომელიც უნდა იყოს განხილული როგორც დამატება ჩემი შრომებისა [1, 2], მტკიცდება, რომ სინგულარული განტოლება (A) შეიძლება მიყვანილი იქნეს, თუ დაცულია (4) პირობა, (7) ფუნქციონალური გარდაქმნის საშუალებით ეკვივალენტური ფრედჰოლმის განტოლებამდე იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ამ განტოლების ინდექსი უარყოფითია.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ციტირებული ლიტერატურა

1. И. Н. Векуа. О сингулярных линейных интегральных уравнениях... Доклады АН СССР, т. XXVI, № 4, 1940, стр. 335—338.
2. Илья Векуа. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. Сообщ. Акад. Наук Грузинской ССР т. II, № 7, 1941, стр. 579—586.