ᲡᲐᲥᲐᲠᲗᲕᲔᲚᲝᲡ ᲡᲡᲠ ᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲔᲑᲐᲗᲐ ᲐᲙᲐᲓᲔᲛᲘᲘᲡ ᲛᲝᲐᲛᲑᲔ, ტ. III, № 3, 1942
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, Т. III, № 3, 1942
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, V. III, No 3, 1942

МАТЕМАТИКА

ИЛЬЯ ВЕКУА

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\Delta^{n+1}u=0$

1. Условимся прежде всего о некоторых терминах и обозначениях.

Пусть T—конечная область на плоскости $z=x+iy$, ограниченная простой замкнутой кривой L.

Пусть $\varphi(s)$—какая-нибудь функция длины дуги s кривой L[1]. Будем говорить, что функция $\varphi(s)$ принадлежит классу H_k, $\varphi(s)\in H_k$ (k—натуральное число или нуль), если производная k-го порядка этой функции удовлетворяет условию Hölder'a.

Пусть $\Phi(z)$—какая-нибудь функция, голоморфная внутри или вне кривой L $[\Phi(\infty)=0]$. Будем говорить, что $\Phi(z)$ H_k-голоморфна соответственно внутри или вне L, если предельные значения этой функции на L принадлежат классу H_k.

Пусть $u(x,y)$—какая-нибудь непрерывная функция (вообще говоря комплексная) в $T+L$. Будем говорить, что $u(x,y)$ H_k-регулярна в области T, если все ее частные производные до k-го порядка удовлетворяют условию Hölder'a в $T+L$.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta^{n+1}u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n+1}u=0, \tag{A}$$

где n—натуральное число или нуль.

Решение уравнения (A) назовем *регулярным* в области T, если оно H_n-регулярно и непрерывно диференцируемо до $2n+2$-го порядка в этой области и, кроме того, если функции $\Delta^k u$, $\frac{d\Delta^k u}{d\nu}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ непрерывны в $T+L$, причем на L $\Delta^k u\in H_{n-k}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, $\frac{d\Delta^k u}{d\nu}\in H_{n-k-1}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, где ν—нормаль кривой L.

Имеет место следующая важная

Теорема 1. *Всякое регулярное (вещественное) решение $u(x,y)$ уравнения (A) в области T можно представить в виде*

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}|z|^{2k}[\varphi_k(z)+\overline{\varphi_k(z)}][2], \tag{B}$$

[1] Длину дуги s будем отсчитывать от произвольно зафиксированной точки на L в положительном направлении, т. е. в направлении, оставляющем область T слева.

[2] Черта над буквой обозначает переход к сопряженному значению, а $\overline{\varphi(z)}=\overline{\varphi}(\bar z)$.

где $\varphi_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — H_n-*голоморфные функции в области* T, *которые определяются при помощи функции* $u(x, y)$ *с точностью до аддитивных мнимых постоянных, и наоборот, любой системе* H_n-*голоморфных функций* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *в области* T *при помощи формулы* (B) *соответствует регулярное решение уравнения* (A).

Формулу (B) можно считать известной (см. напр., [1], стр. 197). Здесь докажем только то, что функции $\varphi_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ H_n-голоморфны в области T, если $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (A).

Из (B) находим, что в области T $\Delta^n u = n! \left[(z^n\varphi_n)^{(n)} + (\overline{z^n\varphi_n})^{(n)}\right]$. Отсюда, в силу H_0-регулярности функции $\Delta^n u$, находим, что $\varphi_n^{(n)}(z)$ H_0-голоморфна в области T, т. е. функция $\varphi_n(z)$ H_n-голоморфна в этой области. Совершенно также доказывается H_n-голоморфность в области T остальных функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

2. В настоящей работе рассматривается следующая (основная)

Краевая задача А. Требуется определить в области T регулярное решение уравнения (A), удовлетворяющее на L условиям

$$u = f_0(s), \quad \frac{du}{d\nu} = f_1(s), \ldots, \frac{d^n u}{d\nu^n} = f_n(s), \tag{C}$$

где $f_0(s), f_1(s), \ldots, f_n(s)$ — заданные функции длины дуги s кривой L, удовлетворяющие условиям: $f_k(s) \in H_{2n-k}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Кроме того, ниже мы будем предполагать, что декартовы координаты точек кривой L, рассмотренные как функции длины дуги s, принадлежат классу H_{2n}.

При $f_0 \equiv f_1 \equiv \cdots f_n \equiv 0$ задачу А назовем однородной и обозначим через A_0.

Имеет место следующая теорема об единственности решения задачи А:

Теорема 2[1]. *Краевая задача* А *не может иметь более одного решения, т. е. однородная задача* A_0 *не имеет решения* (кроме тривиального $u \equiv 0$).

Решение задачи А было дано мной в работе [1] при помощи конформного отображения области T на круг. Еще раньше меня эту задачу, в несколько иной постановке, применяя один метод акад. Н. Мусхелишвили [2], решил П. Зерагия [3] для областей, отображающихся конформно на круг при помощи рациональных функций.

В настоящей работе, используя один весьма остроумный общий способ акад. Н. Мусхелишвили [4] и интегральное представление голоморфных функций, указанное мною в работе [5], я свожу задачу А к интегральным уравнениям Фредгольма, решающим эту задачу полностью.

3. Докажем предварительно одну лемму.

---

[1] Доказательство этой теоремы можно найти в моей работе [1] (стр. 238).

Пусть $u(x, y)$—какая-нибудь вещественная H_k-регулярная функция в области T (k—натуральное число $\geqq 1$). Тогда значения комплексных выражений

$$u_{j,l}\equiv\frac{\partial^{j+l}u}{\partial\zeta^j\partial\bar\zeta^l}=\frac{1}{2^{j+l}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^l u,$$
$$(j, l=0, 1, \ldots, k;\ j+l\leqq k,\ u_{00}\equiv u),$$

на кривой L, очевидно, связаны соотношениями

$$u'_{j,l}=\zeta' u_{j+1,l}+\bar\zeta' u_{j,l+1},\quad j+l\leqq k-1, \tag{1}$$

где $'$ обозначает, как здесь, так и в дальнейшем всюду, производную по дуге s. Из этих соотношений, в частности, легко получаются формулы

$$\mathrm{Re}[(-1)^m\zeta'^{2m+1}u_{2m+1}]=\frac{1}{2}u'_{m,m}+\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Re}[(-)^j\zeta'^{2j}u'_{m+j,m-j}], \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}[(-)^m\zeta'^{2m}u_{2m,0}]=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Im}[(-)^j\zeta'^{2j-1}u'_{m+j-1,m-j}], \tag{3}$$

где m принимает целые неотрицательные значения до тех пор, пока $2m$ или $2m+1$ не станет равным k.

Допустив $k=n$ и используя формулу

$$\frac{d^l u}{dy^l}=i^l\sum_{j=0}^{l}(-)^{l-j}\binom{l}{j}\zeta'^{l-2j}u_{l-j,j}\quad (l=1, \ldots, n),$$

из соотношений (1) и краевых условий (C) найдем выражения значений на L всех $u_{j,l}$, при $j+l\leqq n$, через функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ и их производные; причем, наивысшая производная функции f_k ($k=0, 1, \ldots, n$), которая войдет в эти выражения, будет порядка $n-k$. Поэтому, обозначая полученные таким путем значения функций $u_{j,l}$ на L через $P_{j,l}(s)$, мы можем утверждать, что последние функции принадлежат классу H_n, т. е. что $P_{j,l}\in H_n$.

Кроме того, функции $P_{j,l}$, очевидно, удовлетворяют соотношениям (2) и (3), т. е.

$$\mathrm{Re}[(-)^m\zeta'^{2m+1}P_{2m+1,0}]=\frac{1}{2}P'_{m,m}+\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Re}[(-1)^j\zeta'^{2j}P'_{m+j,m-j}], \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}[(-)^m\zeta'^{2m}P_{2m,0}]=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Im}[(-1)^j\zeta'^{2j-1}P_{m+j-1,m-j}]. \tag{5}$$

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма. *Пусть $u(x,y)$ — какая-нибудь вещественная H_n-регулярная функция в области T. Тогда, если на L: $u=f_0$, $\zeta^k u_{k,0}=\zeta^k P_{k,0}+\chi_k(\zeta)$ ($k=1, 2, \ldots, n$), где $\chi_k(\zeta)$—голоморфные функции в области T, непрерывные в $T+L$ и удовлетворяющие условиям $\mathrm{Re}[\chi_k(0)]$*[1] *$=0$ ($k=1, \ldots, n$), то все $\chi_k(\zeta)\equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\zeta=\omega(\zeta)$—функция, конформно отображающая область T на круг $|\zeta|\leqq 1$, причем $\omega(0)=0$, $\omega'(0)=1$. При наших

[1] Начало координат мы берем внутри области T.

предположениях, функции $\zeta\omega'(\zeta)/\omega(\zeta)$ и $\chi_k^*(\zeta)=\chi_k[\omega(\zeta)]$ $(k=1, \ldots, n)$, очевидно, голоморфны внутри круга $|\zeta|\leqq 1$ и непрерывны вплоть до окружности $|\zeta|=1$. Кроме того, в силу условия леммы

$$\mathrm{Re}[\chi_k^*(0)]=0 \quad (k=1, \ldots, n). \tag{6}$$

При $m=0$ из (2) и (4) получим равенство $\mathrm{Re}[\chi_1(z)z'/z]=0$ на L, которое после конформного преобразования примет вид:

$$\mathrm{Re}[\chi_1^*(\zeta)i\omega'(\zeta)/\omega(\zeta)]=0, \text{ т. е. } \chi_1^*(\zeta)\zeta\omega'(\zeta)=c_1\omega(\zeta),$$

где c_1—вещественная постоянная. Но отсюда, в силу (6), получим $c_1=0$ и, следовательно, $\chi_1(z)\equiv 0$.

Принимая теперь во внимание, что $\chi_1(z)\equiv 0$, из (3) и (5) при $m=1$ легко получаем: $\mathrm{Im}[\chi_2^*(\zeta)\zeta^2\omega'^2(\zeta)/\omega^2(\zeta)]=0$. Откуда, в силу (6), опять получаем $\chi_2(z)\equiv 0$. Продолжая аналогичные рассуждения дальше, используя попеременно формулы (2), (4) и (3), (5), получим $\chi_3(z)\equiv 0, \ldots, \chi_n(z)\equiv 0$, что и доказывает нашу лемму.

4. Приведем теперь без доказательства некоторые известные свойства интегралов типа Коши. Интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt,$$

где $\varphi(t)$—какая-нибудь интегрируемая функция длины дуги s кривой L (s—соответствует точке t), называемая плотностью интеграла типа Коши, изображает функцию, голоморфную как внутри, так и вне L, причем $\Phi(\infty)=0$.

Если $\varphi(t)$ принадлежит классу H_k (k—нуль или натуральное число), то функция $\Phi(z)$ H_k-голоморфна как внутри, так и вне L. При этом, предельные значения этой функции определяются, как известно, формулами[1]

$$\Phi^+(t_0)=\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt, \tag{7}$$

$$\Phi^-(t_0)=-\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt, \tag{8}$$

где интегралы надо брать в смысле главного значения по Коши; эти интегралы также изображают функции, принадлежащие классу H_k.

Пусть φ зависит кроме s также от другой переменной σ. Предположим, что φ как функция σ принадлежит классу H_k, а как функция s—классу H_0. Тогда функция Φ^+ и Φ^-, а также интеграл, входящий в (7) и (8), будут класса H_k относительно переменной σ и класса H_0 относительно переменной s.

[1] Верхние знаки + и −, как здесь, так и в дальнейшем всюду, обозначают предельные значения соответствующей функции на L, соответственно изнутри или извне кривой L.

Имеет также место следующая ([5], стр. 33)

Теорема 3. *Если функция $\varphi(z)$ H_k-голоморфна в области T, то существует единственная вещественная функция $\mu(t)$ длины дуги s кривой L, принадлежащая классу H_k, такая, что, с точностью до аддитивной мнимой постоянной, имеет место формула*

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)}{t-z}\,dt, \quad z\in T, \tag{9}$$

причем, если $\varphi(z)=ic$ (c — вещ. пост.), то $\mu\equiv 0$.

5. Предварительно несколько видоизменим краевые условия (C), а именно, в дальнейшем будем рассматривать краевые условия в виде

$$u=f_0(s),\ u_{1,0}=P_{1,0}(s),\ \ldots,\ u_{n,0}=P_{n,0}(s), \tag{C'}$$

которые, как легко доказать, вполне эквивалентны (C).

Пусть задача A имеет решением функцию $u(x,y)$. Тогда, в силу теоремы 1, функция $u(x,y)$ представима в виде (B), причем, входящие в эту формулу функции $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ H_n-голоморфны в области T и удовлетворяют краевым условиям (C'), т. е.

$$u\equiv\sum_{k=0}^{n}|z|^{2k}[\varphi_k(z)+\overline{\varphi_k(z)}]=f_0(s), \tag{10}$$

$$u_{m,0}\equiv\sum_{k=0}^{n}z^k\psi_k^{(m)}(z)+\sum_{k=m}^{n}\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\overline{\psi_k(z)}=P_{m,0}(s), \tag{11}$$

$$[m=1,2,\ldots,n;\ \psi_k=z^k\varphi_k\ (k=0,1,\ldots,n)].$$

Разрешая систему (11) относительно функций $\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_n$, получим

$$v_m\equiv z^m\overline{\psi_m(z)}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!\,m!}\bar z^k z^l\psi_k^{(l)}(z)=q_m(s), \qquad (m=1,2,\ldots,n), \tag{12}$$

где

$$v_m\equiv\sum_{l=m}^{n}\frac{(-)^{l-m}}{m!(l-m)!}z^l u_{l,0}, \qquad q_m\equiv\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^{l-m}}{m!(l-m)!}z^l P_{l,0}. \tag{13}$$

Следуя акад. Н. Мусхелишвили [4], умножим обе части (12) на $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dz}{z-\zeta}$ (ζ — точка вне L) и проинтегрируем по L. Переходя затем к пределу при $\zeta\to t_0\in L$, в силу (8), получим

$$\Phi_m^-(t_0)\equiv-\frac{1}{2}t_0^m\overline{\psi_m(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{t^m\overline{\psi_m(t)}dt}{t-t_0}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=m}^{n}\frac{(-)^{l-m}}{(l-m)!\,m!}\left[-\frac{1}{2}\bar t_0^k t_0^l\psi_k^{(l)}(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\bar t^k t^l\psi_k^{(l)}(t)}{t-t_0}dt\right]-F_m^-(t_0)=0, \tag{14}$$

$$(m=1,2,\ldots,n),$$

где Φ_m^- и F_m^- обозначают предельные значения интегралов типа Коши с плотностями соответственно v_m-q_m и q_m.

В уравнения (14), очевидно, не входят функция $\varphi_0(z)$ и ее производные, которые при интегрировании исключаются в силу их голоморфности в области T.

Ввиду H_n-голоморфности функций $\psi_k(z)$ $(k=1, \ldots, n)$ имеют место тождества

$$0 \equiv -\frac{1}{2}t_0^m\overline{\psi}_m(\bar{t}_0) - \frac{t_0^m}{2\pi i}\int\frac{\overline{\psi}_m(\bar{t})d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=m}^{n}\frac{(-)^{l-m}}{(l-m)!m!}\left[\frac{1}{2}\bar{t}_0^k t_0^l\psi_k^{(l)}(t_0)-\frac{\bar{t}_0^k t_0^l}{2\pi i}\int\frac{\psi_k^{(l)}(t)dt}{t-t_0}\right] \quad (m=1, 2, \ldots, n). \qquad (15)$$

Кроме того, в силу (11), имеем

$$-\Phi_m(0) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\int\frac{v_m-q_m}{t}\,dt = -\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\psi}_m(\bar{t})t^{m-1}dt$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^{l-m}}{m!(l-m)!}\frac{1}{2\pi i}\int\bar{t}^k t^{l-1}\psi_k^{(l)}(t)dt+F_m(0)=0 \quad (m=1, 2, \ldots, n). \qquad (16)$$

Прибавляя почленно равенства (15) и (16) к соответствующим уравнениям (14) и затем интегрируя по частям выражения, содержащие производные функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$, после замены этих функций опять функциями φ_k $(\psi_k=z^k\varphi_k)$, получим

$$\Phi_m^-(t_0)-\Phi_m(0) \equiv -|t_0|^{2m}\overline{\varphi}_m(\bar{t}_0)+\int N_m(t_0, t)\overline{\varphi}_m(\bar{t})dt$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int N_{m,k}(t_0, t)\varphi_k(t)dt-F_m^*(t_0)=0, \quad (m=1, 2, \ldots, n) \qquad (17)$$

где

$$N_{m,k}(t_0, t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=m}^{n}\frac{(-1)^m t^k}{(l-m)!m!}D^{(l)}\left[\frac{\bar{t}^k t^l-\bar{t}_0^k t_0^l}{t-t_0}-\bar{t}^k t^{l-1}\right], \qquad (18)$$

$$N_m(t_0, t)=\frac{\bar{t}^m t_0^m}{\pi}\frac{d\vartheta(t_0, t)}{dt}+\frac{\bar{t}^m}{2\pi i}\left[\frac{t^m-t_0^m}{t-t_0}-t^{m-1}\right], \qquad (19)$$

$$F_m^*(t_0)=F_m^-(t_0)-F_m(0), \quad (m, k=1, \ldots, n)$$

причем $\vartheta(t_0, t)$ — угол между вектором $\overrightarrow{t_0 t}$ и осью ox, а D обозначает операцию $\bar{t}'(s)\dfrac{d}{ds}$.

Заменяя в уравнениях (17) функции $\varphi_k(z)$, согласно теореме 3, интегралами типа Коши вида (9) с вещественными плоскостями $\mu_k(t)$ и приравнивая нулю вещественные части полученных уравнений, придем к интегральным уравнениям Фредгольма

$$\Omega_m \equiv \mu_m(s_0)+\sum_{j=1}^{m}\int_0^l K_{mj}(s_0, s)\mu_j(s)ds-g_m(s_0)=0, \quad (m=1, 2, \ldots, n) \qquad (20)$$

где s_0 и s — дуги, соответствующие точкам t_0 и t, l — длина кривой L,

$$K_{mj}(s_0, s)=|t_0|^{-2m}\mathrm{Re}\left[-t'(s)N_{mj}(t_0, t)+\frac{t'(s)}{\pi i}\int\frac{N_{mj}(t_0, t_1)}{t_1-t}dt_1\right], \text{ при } m\neq j,$$

и

$$K_{m,m}(s_0, s)=\frac{1}{\pi}\frac{d\vartheta(t_0, t)}{ds}-|t_0|^{-2m}\mathrm{Re}\left[\overline{t'(s)N_m(t_0, t)}+\frac{\overline{t'(s)}}{\pi i}\int\frac{\overline{N_m(t_0, t_1)}}{\bar t_1-\bar t}dt_1\right]$$

$$+|t_0|^{-2m}\mathrm{Re}\left[-t'(s)N_{m,m}(t_0, t)+\frac{t'(s)}{\pi i}\int\frac{N_{m,m}(t_0, t_1)}{t_1-t}dt_1\right], \qquad (21)$$

$$\Omega_m\equiv-|t_0|^{-2m}\mathrm{Re}[\Phi_m^-(t_0)-\Phi_m(0)],\ g_m(s_0)=-|t_0|^{-2m}\mathrm{Re}[F_m^*(t_0)]. \qquad (22)$$

Присоединим к системе (20) еще одно интегральное уравнение

$$\Omega_0\equiv\sum_{j=0}^{n}|t_0|^{2j}\left[\mu_j(s_0)+\frac{1}{\pi}\int_0^l\mu_j(s)d\vartheta(t_0, t)\right]-f_0(s_0)=0, \qquad (23)$$

которое получается из (10).

Таким образом, мы получили систему $n+1$ уравнений Фредгольма для определения $n+1$ неизвестных функций $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$.

6. Докажем, что система уравнений (20), (23) всегда разрешима и что при помощи ее решения можно получить решение краевой задачи A.

Из (18), (19), (21) и (22), в силу свойств интегралов типа Коши, отмеченных в n° 4, заключаем: 1) функции $K_{mj}(s_0, s)$ принадлежат относительно переменной s_0 классу H_n, а относительно переменной s—классу H_0, 2) функции $g_m(s_0)\in H_n$. Поэтому, всякое непрерывное решение (если таковое существует) системы (20), (23) будет класса H_n. Следовательно, голоморфные функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, соответствующие решению системы (20), (23), согласно n° 4, будут H_n-голоморфными в области T; решение $u(x, y)$ уравнения (A), соответствующее этим функциям $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, будет регулярным в области T. Докажем, что это решение удовлетворяет краевым условиям (C).

В силу (20) имеем: $\Phi_m(\zeta)-\Phi_m(0)=ic_m$ ($m=1, 2, \ldots, n$; c_m—вещ. пост., ζ—точка вне L). Отсюда, $\Phi_m(0)=-ic_m$, $\Phi_m(\zeta)\equiv0$, т. е. $v_m-q_m=\omega_m(z)$ ($m=1, 2, \ldots, n$), где $\omega_m(z)$—предельные значения голоморфных внутри L функций, непрерывных в $T+L$ и удовлетворяющих, как легко видеть в силу (16) и равенств $\Phi_m(0)=-ic_m$, условиям: $\mathrm{Re}[\omega_m(0)]=0$ ($m=1, \ldots, n$). Но тогда, в силу (13) и (23), получим: $u=f_0(s)$, $z^k u_{k,0}=z^k P_{k,0}(s)+\chi_k(z)$ на L ($k=1, \ldots, n$), где функции $\chi_k(z)$, как легко видеть, удовлетворяют всем условиям леммы, согласно которой и будем иметь: $u=f_0(s), u_{1,0}=P_{1,0}(s)$, $\ldots, u_{n,0}=P_{n,0}(s)$ на L, что и требовалось доказать.

Таким образом, если система уравнений (20) и (23) разрешима, то разрешима также задача A. Докажем теперь разрешимость системы (20) и (23).

Пусть $u^0(x, y)$—решение уравнения (A), соответствующее решению $\mu_0^0(s), \mu_1^0(s), \ldots, \mu_n^0(s)$ однородной системы интегральных уравнений, соответствующих (20) и (23). Рассуждая так же как и выше, при помощи нашей леммы легко докажем, что $u^0(x, y)$ — решение задачи A_0. Но тогда, согласно теореме 2, $u^0(x, y) \equiv 0$ и соответствующие ему голоморфные функции $\varphi_k^0(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, в силу теоремы 1, равны ic_k (c_k—вещ. пост.). Следовательно, в силу теоремы 3, $\mu_k^0 \equiv 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, т. е. однородная система уравнений, соответствующая (20) и (23), не имеет решения.

Таким образом, окончательно установлена резрешимость системы (20) и (23).

7. Наконец, отметим, что изложенный выше способ решения краевой задачи A применим также к решению краевой задачи, связанной с уравнением более общего вида

$$\Delta^{n+1}u + a_1(x, y)\Delta^n u + \ldots + a_{n+1}(x, y)u = 0,$$

если использовать общее представление всех решений этого уравнения, данное нами в работе [1].

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 15.2.1942)

მათემატიკა

ილია ვეკუა

ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა განტოლებისათვის $\Delta^{n+1}u = 0$

რეზუმე

შრომაში ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანა აღნიშნული განტოლებისათვის (C) პირობების დაცვით.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ციტირებული ლიტერატურა

1. **Илья Векуа.** Комплексное представление решений... Труды Тбил. Мат. Ин-та, т. VII, 1939, стр. 161—253.
2. N. Muschelišvili. Applications des integrales analogues a celles de Cauchy... Tiflis. 1922.
3. პოლ. ზერაგია. პოლიჰარმონიულ განტოლებათა ინტეგრაციის შესახებ. თბილ. მათ. ინსტ. შრ., ტ. VIII, 1940, გვ. 135—136.
4. **Н. Мусхелишвили.** Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости. Доклады АН СССР, т. III, № 1, 1934, стр. 7—11.
5. **Илья Векуа.** Граничные задачи теории линейных эллиптических уравнений... Сообщ. Груз. Филиала АН СССР, т. I, № 1, 1940, стр. 29—34.