თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები, ტ. XI, 1942
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. XI, 1942
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. XI, 1942

ИЛЬЯ ВЕКУА

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

§ 1. Введение. Постановка задачи

Пусть T—конечная односвязная область на плоскости комплексной переменной $z=x+iy$, ограниченная простой замкнутой кривой L, имеющей непрерывную кривизну. Во всем дальнейшем будем обозначать через $t, t_1, t_2, \ldots,$ аффиксы точек кривой L, а через $s, s_1, s_2, \ldots$ длины дуг, соответствующие этим точкам; причем отсчет длины дуги будем производить от некоторой зафиксированной точки на L в положительном направлении, т. е. в направлении, оставляющем область T слева. Бесконечную область, ограниченную кривой L, обозначим через T'.

Пусть $\varphi(t)$—какая-нибудь функция точки контура L, вообще говоря, принимающая комплексные значения[1]. Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H, $\varphi(t)\in H$, если она непрерывна в смысле Hölder'а на L, т. е. если существуют такие положительные постоянные M и λ, $\lambda \leqq 1$, что для любой пары точек t_1 и t_2 контура L имеет место неравенство

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqq M|t_1-t_2|^{\lambda}.$$

В дальнейшем функции класса H часто будем называть сокращенно H-функциями.

Пусть N—какое-нибудь натуральное число или нуль. Будем говорить, что функция $f(z)$ является H_N-голоморфной в области T, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) она голоморфна в области T, 2) при приближении точки z из области T по любому пути к любой граничной точке t, функции $f(z)$, $f'(z), \ldots, f^{(N)}(z)$ равномерно стремятся к пределу и эти предельные значения представляют функции класса H[2].

2. В настоящей работе будет изучаться следующая граничная задача теории аналитических функций:

---

[1] Если s—длина дуги, соответствующей точке t, то $\varphi(t)$ и $\varphi(s)$ будут обозначать одну и ту же функцию.

[2] В случае бесконечной области к этим условиям надо добавить еще ограниченность $f(z)$ на бесконечности.

Требуется определить функцию $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, H_N-голоморфную в области T, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N}\left[a_k(t)\,f^{(k)}(t)+\int_L h_k(t, t_1)\,f^{(k)}(t_1)\,ds_1\right]\right\}=b(t), \tag{$\mathfrak{A}$}$$

где $a_0(t), \ldots, a_N(t)$, $b(t)$—функции, заданные на L и принадлежащие классу H, причем $b(t)$ принимает вещественные значения; $h_0(t, t_1), \ldots, h_N(t, t_1)$—заданные функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения и удовлетворяющие условиям: 1) в квадрате $0 \leqq s, s_1 \leqq l$, где l—длина кривой L, эти функции могут иметь точки и гладкие линии разрыва в конечном числе; линии разрыва по условию должны пересекаться с каждой прямой, параллельной какой-нибудь стороне квадрата в конечном числе точек, 2) интегралы

$$\int_L h_k(t, t_1)\,\varphi(t_1)\,dt_1, \quad \int_L h_k(t_1, t)\,\varphi(t_1)\,dt_1$$

$$(k=0, 1, \ldots, N)$$

для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ представляют функции класса H; $f^{(k)}(t)$ обозначает предельные значения функции $f^{(k)}(z)$, когда точка z приближается к точке t контура L по любому пути из области T.

В дальнейшем эту задачу для краткости будем называть «*задачей* $\mathfrak{A}$», а однородную задачу ($b \equiv 0$)—задачей $\mathfrak{A}_0$.

3. Задача $\mathfrak{A}$ представляет частный случай общей граничной задачи теории аналитических функций, поставленной еще Риманом в его знаменитой диссертации [1]: определить в области T аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если на границе этой области задана определенная связь между вещественной и мнимой частями этой функции.

В одном частном случае, когда граничное условие имеет вид

$$au+bv=c,$$

где a, b, c—вещественные функции, заданные на L, задача Римана впервые была рассмотрена Гильбертом [2]. Задача Гильберта, очевидно, является частным случаем нашей задачи $\mathfrak{A}$ ($N=0$, $h_0=0$).

Частным случаем задачи $\mathfrak{A}$ является также следующая краевая задача теории логарифмического потенциала:

Требуется определить в области T гармоническую функцию $u(x, y)$ по граничному условию

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=d,$$

где a, b, c, d—вещественные функции, заданные на L. Эта задача, в связи с теорией приливов, была поставлена и изучена впервые Пуанкаре [3]. Поэтому ее часто называют задачей Пуанкаре; в частности, ниже и мы будем называть ее этим именем.

Задачу $\mathfrak{A}$ в одном частном случае ($h_k\equiv 0$, $k=0, 1, \ldots, N$) рассматривал также Ф. Д. Гахов [4], который, следуя Гильберту, пользуется функцией Грина и, налагая попутно на искомую функцию некоторые дополнительные ограничения (не вытекающие, между прочим, из существа задачи), приводит задачу к сингулярному интегральному уравнению, ядро которого является весьма сложным и содержит в общем случае неизвестную функцию Грина, что сильно затрудняет изучение этого уравнения.

В настоящей работе, при помощи полученного мною одного нового интегрального представления аналитических функций [5, 6], задача $\mathfrak{A}$ сводится к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению, ядро которого довольно просто составляется при помощи функций a_k и h_k; при этом, пользуясь общей теорией сингулярных интегральных уравнений, мне удается не только свести задачу $\mathfrak{A}$, путем регуляризации соответствующего сингулярного интегрального уравнения, к эквивалентному уравнению Фредгольма, но также получить, благодаря явному виду ядра нашего сингулярного уравнения, некоторые новые признаки разрешимости этой задачи.

§ 2. Вспомогательный материал

В этом параграфе излагаются (без доказательства) некоторые основные свойства интегралов типа Коши и основные теоремы теории сингулярных интегральных уравнений, которыми ниже придется нам часто пользоваться. Кроме того, в этом же параграфе я коротко излагаю решение задачи Гильберта, следуя методу, указанному в общих чертах самим Гильбертом [2].

1. Пусть $\varphi(t)$—какая-нибудь функция класса H. Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{1}$$

представляет H_0-голоморфную функцию как в области T, так и в области T'. Предельные значения итеграла (1), соответственно изнутри и извне кривой L, будут [1]

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1 - t}, \tag{2}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1 - t}, \tag{3}$$

где интеграл берется в смысле главного значения по Коши. Важно отметить, что этот интеграл представляет H-функцию, если $\varphi(t)$ есть H-функция (см., напр., [7], стр. 166—172).

Докажем теперь теорему.

Если $u(x, y)$—гармоническая функция в области T, непрерывная в $T+L$, граничные значения которой на L представляют функцию класса H, то сопряженная с ней гармоническая функция $v(x, y)$ также непрерывна в $T+L$ и граничные значения ее представляют H-функцию на L, т. е. функция $f(z) = u + iv$ является H_0-голоморфной в области T.

Доказательство. Как известно, гармоническую функцию $u(x, y)$ мы можем представить в виде логарифмического потенциала двойного слоя

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int \frac{\mu(t)\,dt}{t - z}\right],$$

где $\mu(t)$—вещественная функция точки контура L, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$\mu(t) + \int \mu(t_1)\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{t'_1}{t_1 - t}\right] ds_1 = u(s),$$

причем $u(s)$ обозначает предельные значения функции $u(x, y)$; по условию, $u(s) \in H$. Как известно, это интегральное уравнение разрешимо для любой непрерывной правой части и решение его в нашем случае, как легко видеть, принадлежит классу H, т. е. $\mu(t) \in H$. Функция $v(x, y)$, сопряженная с $u(x, y)$, очевидно, будет

$$v(x, y) = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi i}\int \frac{\mu(t)\,dt}{t - z}\right] + C,$$

[1] В дальнейшем всюду, где встретится символ интеграла без указания области интегрирования, надо подразумевать интеграл, взятый по контуру L.

Кроме того, во всем дальнейшем верхние знаки «+» и «—» над символом функции будем ставить тогда и только тогда, когда эти функции представляют граничные значения H-голоморфных функций, соответственно в областях T и T'.

где C—вещественная постоянная. В силу вышеприведенных свойств интегралов типа Коши, нетрудно видеть, что функция

$$f(z)=u+iv=\frac{1}{\pi i}\int\frac{\mu(t)}{t-z}\,dt+iC$$

является H_0-голоморфной в области T, что и требовалось доказать.

2. Для того, чтобы H-функция $\varphi(t)$ представляла граничные значения функции, H_0-голоморфной в области T, как известно, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\int\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=0$$

для всех z в области T'. Это равенство, очевидно, равносильно уравнениям

$$\int\varphi(t)\,t^k dt=0,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{4}$$

Легко доказать, что единственная вещественная H-функция, удовлетворяющая условиям (4)—постоянная.

Совершенно аналогично, условия

$$\int\frac{\varphi(t)}{t^k}\,dt=0,\quad k=1,\ 2,\ldots \tag{4'}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция $\varphi(t)$ представляла граничные значения функции, голоморфной вне L и обращающейся в нуль на бесконечности.

3. Рассмотрим теперь задачу Гильберта:

Требуется найти функцию $f(z)=u+iv$, H_0-голоморфную в области T, по граничному условию

$$au+bv=c\qquad (a^2+b^2\neq 0 \text{ всюду на } L), \tag{5}$$

где a, b, c—заданные вещественные H-функции на L. Без ограничения общности, мы можем считать, что $a^2+b^2=1$ всюду на L.

Введя комплексную функцию $\alpha(t)=a+ib$, граничное условие (5) можно записать еще так [1]

$$\mathrm{Re}[\overline{\alpha(t)}\,f(t)]=c. \tag{6}$$

Пусть

$$\mathrm{Ind}\,[\alpha(t)]=\frac{1}{2\pi}\,\{\arg\alpha(t)\}_L=n,$$

где $\{\ \}_L$ обозначает приращение выражения, находящегося в скобке при обходе контура L один раз в положительном направлении. Это число

[1] Верхняя черта обозначает переход к комплексно-сопряженному значению.

n—целое или нуль и носит название индекса Коши функции $\alpha(t)$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Ind}[\overline{\alpha(t)}]=\operatorname{Ind}[1/\alpha(t)]=-n.$$

Отсюда, между прочим, очевидно, что индекс Коши вещественной функции, отличной от нуля всюду на L, равен нулю.

Пусть

$$\alpha(t)=a+ib=e^{i\omega(s)},$$

где, как легко видеть, функция $\omega(s)$ имеет вид

$$\omega(s)=\omega_0(s)+n\vartheta, \qquad \vartheta=\arg t\ ^{(1},$$

причем $\omega_0(s)$ принадлежит классу H. Пусть $q(z)$ представляет H_0-голоморфную функцию в области T, однозначно определенную условиями

$$\operatorname{Re}[q(t)]=\omega_0(s) \quad (\text{на } L), \quad \operatorname{Im}[q(0)]=0.$$

Тогда граничное условие (6), как легко видеть, можно записать еще так

$$\operatorname{Re}[t^{-n}e^{-iq(t)}f(t)]=c^*, \tag{7}$$

где

$$c^*=|t|^{-n}e^{\operatorname{Im}[q(t)]}c(s).$$

Пусть сперва $n<0$. Тогда функция $z^{-n}e^{-iq(z)}f(z)$ будет H_0-голоморфной в области T и из (7) получим

$$z^{-n}e^{-iq(z)}f(z)=iC+f^*(z), \tag{8}$$

где C—произвольная вещественная постоянная, а $f^*(z)$ есть H_0-голоморфная функция, однозначно определенная условиями

$$\operatorname{Re}[f^*(t)]=c^* \quad (\text{на } L), \quad \operatorname{Im}[f^*(0)]=0.$$

Из (8) имеем

$$f(z)=z^{n}e^{iq(z)}[iC+f^*(z)]. \tag{9}$$

Из этой формулы сразу видно, что $f(z)$ будет голоморфной функцией в области T тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$C=0, \quad f^*(0)=0, \quad f^{*\prime}(0)=0, \ldots, f^{*(m-1)}(0)=0 \quad (m=-n). \tag{10}$$

Эти условия, как легко видеть, имеют вид

$$\int c(s)\,\nu_k(s)\,ds=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2m-1, \tag{11}$$

где $\nu_k(s)$—известные вещественные функции ($\nu_k(s)\not\equiv 0$).

(1 Предполагается, что начало координат находится внутри области T.

Таким образом, задача Гильберта при $n<0$ имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть $c(s)$ удовлетворяет условиям (11); причем, в этом случае задача имеет единственное решение, которое, в силу (9) и (10), имеет вид

$$f(z)=z^n e^{iq(z)} f^*(z).$$

В частности, если $c\equiv 0$, то и $f^*(z)\equiv 0$. Следовательно, однородная задача Гильберта не имеет нетривиального решения, когда $\operatorname{Ind}(a+ib)$ отрицателен.

Пусть теперь $n\geqq 0$. Представим искомую функцию в виде

$$f(z)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)z+\cdots+(a_{n-1}+ib_{n-1})z^{n-1}+z^n f_1(z), \tag{12}$$

где a_k, b_k—вещественные постоянные, $f_1(z)$—новая неизвестная H_0-голоморфная функция в области T.

В силу (12), условие (7) примет вид

$$\operatorname{Re}[e^{-iq(t)}f_1(t)]=c^*-\operatorname{Re}\left\{e^{-iq(t)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k+ib_k}{t^{n-k}}\right\}.$$

Отсюда, так как функция $e^{-iq(z)}f_1(z)$ является H_0-голоморфной в области T, получим

$$e^{-iq(z)}f_1(z)=f_1^*(z)+iC-\sum_{k=0}^{n-1}[a_k g_k^*(z)+b_k h_k^*(z)], \tag{13}$$

где C—произвольная вещественная постоянная, $f_1^*(z), h_k^*(z)$, $g_k^*(z)$ суть H_0-голоморфные функции в области T, однозначно определенные условиями

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}[f_1^*(t)]=c^* \quad (\text{на } L), \quad \operatorname{Im}[f_1^*(0)]=0,\\ \operatorname{Re}[g_k^*(t)]=\operatorname{Re}[e^{-iq(t)}t^{k-n}], \quad \operatorname{Im}[g_k^*(0)]=0,\\ \operatorname{Re}[h_k^*(t)]=\operatorname{Re}[ie^{-iq(t)}t^{k-n}], \quad \operatorname{Im}[h_k^*(0)]=0,\\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).\end{gathered}$$

Легко доказать, что функции $g_k^*(z)$, $h_k^*(z)$—линейно независимы[1].

На основании (13), формула (12) дает

$$f(z)=f^*(z)+Cf_0(z)+\sum_{k=0}^{n-1}[a_k g_k(z)+b_k h_k(z)], \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}f^*(z)=z^n e^{iq(z)}f_1^*(z), \quad f_0(z)=iz^n e^{iq(z)},\\ g_k(z)=z^k-z^n e^{iq(z)}g_k^*(z),\ h_k(z)=iz^k-z^n e^{iq(z)}h_k^*(z)\\ (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).\end{gathered}$$

[1] Здесь и во всем дальнейшем (кроме особо оговоренных случаев) мы называем функции $f_1(z),\ldots,f_k(z)$ линейно независимыми, если линейный агрегат $c_1f_1+\cdots+c_kf_k$ с вещественными коэфициентами $c_1,\ldots,c_k$ тогда и только тогда обращается тождественно в нуль, когда все числа $c_j=0$.

Легко доказать, что функции $f_0(z)$, $g_k(z)$, $h_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ — линейно независимы.

Функция $f(z)$, определенная формулой (14), при любых значениях вещественных постоянных C, a_0, b_0, $\ldots$, a_{n-1}, b_{n-1}, удовлетворяет условию (6).

Таким образом, если $\operatorname{Ind}(a+ib)\geqq 0$, то задача Гильберта имеет решение для любой правой части $c(s)$ и это решение имеет вид (14). В частности, однородная задача Гильберта $(c=0)$ при $n\geqq 0$ имеет $2n+1$ линейно независимых решений f_0, g_0, h_0, $\ldots$, g_{n-1}, h_{n-1}.

Таким образом, нами установлена следующая теорема:

Теорема. *Задача Гильберта* (5) *для произвольной правой части* $c(s)$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $n\geqq 0$, *при этом однородная задача* $(c=0)$ *имеет* $2n+1$ *линейно независимых решений. Если* $n<0$, *то однородная задача* $(c=0)$ *не имеет решения, а неоднородная задача имеет решение, и притом единственное, лишь при выполнении условий* (11).

4. Ниже нам придется иметь дело с сингулярным интегральным уравнением вида

$$A\varphi\equiv\alpha(t)\,\varphi(t)-\int\frac{k(t,\ t_1)}{t_1-t}\,\varphi(t_1)\,dt_1=f(t), \tag{A}$$

где $\alpha(t)$, $k(t,\ t_1)$, $f(t)$ — заданные функции класса H на контуре L, а $\varphi(t)$ — искомая функция; причем, интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши.

Обшая теория интегральных уравнений вида (A) в настоящее время разработана довольно хорошо (см., напр., [8]). Мы приведем здесь (без доказательства) некоторые основные результаты из этой теории.

Рассмотрим уравнение союзное с (A)

$$A'\psi\equiv\alpha(t)\,\psi(t)+\int\frac{k(t_1,\ t)}{t_1-t}\,\psi(t_1)\,dt_1=0. \tag{A$'_0$}$$

Пусть $\beta(t)=k(t,\ t)$ и обозначим

$$\operatorname{Ind}\,(A)=\operatorname{Ind}\left[\frac{\alpha(t)+i\pi\beta(t)}{\alpha(t)-i\pi\beta(t)}\right]=n,$$

причем мы предполагаем, что $\alpha^2+\pi^2\beta^2\neq 0$ всюду на L. Уравнение вида (A), для которого выполняется последнее неравенство, будем называть уравнением *нормального типа* и в дальнейшем все время будем иметь в виду именно уравнение такого вида. Число n будем называть индексом уравнения (A). Нетрудно видеть, что индекс уравнения (A$'$) будет $-n$.

Имеют место следующие теоремы[1]:

Теорема 1. *Число линейно независимых решений*[2] *однородного уравнения* $A\varphi=0$ *ограничено.*

Теорема 2. *Для того, чтобы уравнение* (A) *имело решение необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения удовлетворяла условиям*

$$\int f(t)\,\psi_j(t)\,dt=0, \qquad j=1,\ldots,\nu',$$

где $\psi_1,\ldots,\psi_{\nu'}$ *—линейно независимые решения*[2] *союзного однородного уравнения* (A'_0).

Теорема 3. *Пусть* ν *и* ν' *—числа линейно независимых решений*[2] *однородных уравнений* $A\varphi=0$ *и* $A'\psi=0$ *соответственно. Тогда* $\nu-\nu'=n$, *где* n *— индекс уравнения* (A).

Последние две теоремы впервые были доказаны Ф. Нетером [9]. Другое доказательство их дано нами в работах [8, 10].

Возьмем какую-нибудь определенную ветвь функции

$$h(t)=\lg\left[\frac{\alpha(t)+i\pi\beta(t)}{\alpha(t)-i\pi\beta(t)}\,t^{-n}\right],$$

которая, очевидно, является функцией класса H на L. Рассмотрим функцию

$$\chi(z)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\frac{h(t)\,dt}{t-z}\right],$$

которая, очевидно, H_0-голоморфна в области T.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\gamma(t)=\frac{1}{\chi^+(t)[\alpha(t)-i\pi\beta(t)]},$$

$$\alpha^*(t)=\frac{\alpha(t)}{\alpha^2(t)+\pi^2\beta^2(t)}, \qquad \beta^*(t)=\frac{\beta(t)}{\gamma(t)[\alpha^2(t)+\pi^2\beta^2(t)]},$$

$$k^*(t,t_1)=\alpha^*(t)\,A(t,t_1)+\beta^*(t)\int\frac{A(t_2,t_1)\,\gamma(t_2)}{t_2-t}\,dt_2,$$

$$f^*(t)=\alpha^*(t)\,f(t)+\beta^*(t)\int\frac{f(t_1)\,\gamma(t_1)}{t_1-t}\,dt_1,$$

где

$$A(t,t_1)=\frac{k(t,t_1)-k(t,t)}{t_1-t}.$$

---

[1] Под решением уравнения (A) мы будем подразумевать всегда непрерывное решение, причем при сделанных нами предположениях относительно функций a, k, f— это решение будет принадлежать классу H.

[2] Под линейно независимыми решениями мы подразумеваем линейно независимые решения в обычном смысле.

Функции $\gamma(t)$, $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$, $f^*(t)$ принадлежат классу H, а функция $k^*(t, t_1)$ имеет вид (см. [8], § 3)

$$k^*(t, t_1) = \frac{k_0^*(t, t_1)}{|t_1 - t|^\lambda},$$

где $\lambda < 1$, $k_0^*(t, t_1)$—функция, принадлежащая классу H относительно каждого аргумента.

Мною доказаны следующие теоремы [8]:

Теорема 4. *Если индекс уравнения* (A) *неотрицателен,* $n \geqq 0$, *то это уравнение для любой правой части* $f(t)$ *эквивалентно уравнению Фредгольма*

$$A^*\varphi \equiv \varphi(t) - \int k^*(t, t_1)\,\varphi(t_1)\,dt_1 = f^*(t) + \beta^*(t)\sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1},$$

где $c_1, \ldots, c_n$—*произвольные комплексные постоянные, причем когда* $n=0$ *надо положить все* $c_k = 0$.

Теорема 5. *Если* $n < 0$, *то уравнение* (A) *эквивалентно системе функциональных уравнений Фредгольма*

$$A^*\varphi \equiv \varphi(t) - \int k^*(t, t_1)\,\varphi(t_1)\,dt_1 = f^*(t), \tag{15}$$

$$\int \delta_k(t)\,\varphi(t)\,dt = f_k, \qquad k = 1, \ldots, |n|, \tag{16}$$

где

$$\delta_k(t) = -\int t_1^{k-1}\gamma(t_1)\,A(t_1, t)\,dt_1,$$

$$f_k = \int t^{k-1}\gamma(t)\,f(t)\,dt$$

По поводу функциональных уравнений (15), (16) нами установлена также теорема следующего содержания [8]:

Пусть среди функции $\delta_k(t)$ имеется h линейно независимых функций[1] $0 \leqq h \leqq |n|$. Система уравнений (15), (16) будет эквивалентна одному уравнению Фредгольма тогда и только тогда, когда правая часть уравнения (A) удовлетворяет условиям вида

$$\int f(t)\,\chi_j(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, \ldots, |n| - h, \tag{17}$$

где

$$\chi_j(t) = (c_{j1} + c_{j2}t + \cdots + c_{j|n|}t^{|n|-1})\gamma(t),$$

[1] Здесь подразумевается линейная независимость в обычном смысле.

причем c_{jk}—определенные постоянные. Если же условие (17) не выполняется, то уравнение (A) неразрешимо. В частности, когда $|n|=h$, то условие (17) отсутствует и, следовательно, в этом случае уравнения (15), (16) при любой функции $f(t)$ эквивалентны некоторому уравнению Фредгольма.

§ 3. Интегральное представление H_N-голоморфных функций

В этом параграфе мы докажем одну лемму, играющую весьма важную роль в дальнейшем.

Основная лемма. *Пусть $f(z)$—какая-нибудь H_N-голоморфная функция области T. Тогда существует единственная вещественная функция $\varphi(t)$ класса H и единственная вещественная постоянная C такие, что для всех z в области T имеют место формулы: при $N=0$*

$$f(z)=\int \frac{\varphi(t)\, t\, ds}{t-z}+iC \tag{1}$$

и, при $N \geqq 1$

$$f(z)=\int \varphi(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{N-1} \lg\left(1-\frac{z}{t}\right) ds+\int \varphi(t)\, ds+iC, \tag{2}$$

где под $\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)$ надо понимать ту ветвь этой функции, которая обращается в нуль при $z=0$ и $t \in L$.

Доказательство. Докажем сперва формулу (1). Прежде всего заметим, что если $\varphi(t) \in H$, то, на основании § 2 n° 1, формула (1) будет представлять H_0-голоморфную функцию в области T, какова бы ни была постоянная C. Принимая во вниманое, что $ds=\bar{t}'(s)\, dt$, из (1), в силу формулы (2) § 2, получим

$$f^{+}(t)=\pi i t \bar{t}' \varphi(t)+\int \frac{\varphi(t_1)\, t_1\, ds_1}{t_1-t}+iC. \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Re}[\pi i t \bar{t}']\, \varphi(t)+\int \varphi(t_1) \operatorname{Re}\left[\frac{t_1}{t_1-t}\right] ds_1=\operatorname{Re}[f^{+}(t)]. \tag{4}$$

Но это есть, как легко видеть, сингулярное уравнение нормального типа с индексом, равным нулю.

Рассмотрим союзное уравнение

$$\operatorname{Re}[\pi i t \bar{t}']\, \psi(t)+\int \psi(t_1) \operatorname{Re}\left[\frac{t}{t-t_1}\right] ds_1=0, \tag{5}$$

которое, как легко заметить, можно записать еще так

$$\operatorname{Re}\left[t\left(\pi i\bar{t}'\psi(t)-\int\frac{\psi(t_1)\,ds_1}{t_1-t}\right)\right]=0.$$

Пусть

$$\Psi(z)=\int\frac{\psi(t_1)\,ds_1}{t_1-z}.$$

Тогда уравнение (5), в силу формулы (3) § 2, можно записать еще в виде

$$\operatorname{Re}[t\Psi^-(t)]=0.$$

Но, так как $\Psi(\infty)=0$ и $\operatorname{Im}[z\Psi(z)]_{z=\infty}=0$, будем иметь, что $\Psi(z)\equiv 0$ в области T'. Это означает, что функция $\psi(t)\,\bar{t}'(s)$ представляет граничные значения функции, H_0-голоморфной в области T (§ 2 n° 2), т. е.

$$\psi(t)\,\bar{t}'(s)=\Phi^+(t).$$

Отсюда сразу получаем, в силу вещественности функции $\psi(t)$, уравнение

$$\operatorname{Im}[t'(s)\,\Phi^+(t)]=0.$$

Но это—частный вид однородной задачи Гильберта, рассмотренной нами в § 2 n° 3, с индексом, как легко видеть, равным -1. Следовательно, в силу теоремы, доказанной в § 2 n° 3, $\Phi^+(t)\equiv 0$, т. е. $\psi(t)\equiv 0$. Таким образом, доказано, что уравнение (5) не имеет решения.

На основании теорем Нетера (§ 2 n° 4) мы можем теперь легко заключить, что уравнение (4) разрешимо для любой правой части и имеет единственное H-решение, которое удовлетворяет также уравнению (3). Таким образом, доказано, что функция $\varphi(t)$ определяется единственным образом при помощи H_0-голоморфной функции $f(z)$, точнее говоря, с помощью вещественной части этой функции. Постоянная C, очевидно, равна $\operatorname{Im}[f(0)]$.

Итак, первая часть нашей леммы установлена.

Переходим теперь к доказательству второй части нашей леммы, т. е. формулы (2).

Пусть $\varphi(t)$—какая-нибудь вещественная функция, принадлежащая классу H. Тогда, как нетрудно видеть, функция, определенная формулой (2) является H_N-голоморфной в области T.

В самом деле, диференцируя обе части формулы (2) N раз по z, получим

$$f^{(N)}(z)=\varepsilon_N\int\frac{\varphi(t)\,ds}{t^{N-1}(t-z)},\quad \varepsilon_N=\begin{cases}1, & N=0\\ (-1)^N(N-1)!, & N>0.\end{cases}\tag{6}$$

Отсюда, в силу свойств интегралов типа Коши (§ 2 n° 1), сразу вытекает, что $f^{(N)}(z)$ является H_0-голоморфной функцией в области T, а это и доказывает наше утверждение.

Докажем теперь, что, если H_γ-голоморфная функция $f(z)$ представима в виде (2), где $\varphi(t)$ вещественная H-функция точки t контура L, то функция $\varphi(t)$ и постоянная C определяются единственным образом.

Для этого достаточно доказать, что правая часть формулы (2) может обратиться тождественно в нуль только в том случае, когда $C=0$ и $\varphi(t)\equiv 0$.

Пусть

$$\int \varphi(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{N-1}\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int \varphi(t)\,ds+iC\equiv 0;$$

разлагая левую часть в ряд по степеням z, получим $C=0$ и

$$\int \varphi(t)\,t^{-m}\,ds=0, \qquad m=0,\ 1,\ldots$$

Но это условие, в силу (4') § 2 n° 2, означает, что

$$\varphi(t)\bar{t}'(s)=\Phi^-(t), \tag{7}$$

где $\Phi(z)$ есть H_0-голоморфная функция вне L, которая обращается в нуль на бесконечности как $\frac{1}{z^2}$. Из (7) имеем

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(t)\,t'(s)]=\frac{d}{ds}\operatorname{Im}\left[\int^t \Phi^-(t)\,dt\right]=0. \tag{8}$$

Так как $\int^z \Phi(z)\,dz$—голоморфная функция вне L, из (8) сразу найдем, что $\Phi^-(t)\equiv 0$, т. е. $\varphi(t)\equiv 0$. Этим доказано наше утверждение.

На основании только что доказанного свойства формулы (2), легко установить следующие предложения:

1) Если $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ...—какие-нибудь линейно независимые вещественные функции точки t контура L, принадлежащие классу H, то голоморфные функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., соответствующие этим функциям по формуле (2), будут также линейно независимыми.

2) Если линейно независимые голоморфные функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... представимы в виде (2), то соответствующие им вещественные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ...—линейно независимы.

Пусть $f(z)$—какая-нибудь H_γ-голоморфная функция в области T, которая представлена в виде (2), где $\varphi(t)$—вещественная функция точки контура L, принадлежащая классу H.

Тогда из формулы (6), путем перехода к пределу при приближении точки z изнутри области T к граничной точке t, в силу свойства интегралов типа Коши (§ 2 n° 1), получим

$$f^{(N)}(t)=\varepsilon_N\pi i t^{1-N}\overline{t'(s)}\varphi(t)+\varepsilon_N\int\frac{\varphi(t_1)\,ds_1}{t_1^{N-1}(t_1-t)}\cdot$$

Деля обе части этого равенства на $\varepsilon_N \pi i \bar{t}' t^{1-N}$ и принимая во внимание соотношение $t'(s)\bar{t}'(s)=1$, получим

$$\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int \frac{t^{N-1}t'(s)}{t_1^{N-1}(t_1-t)}\,\varphi(t_1)\,ds_1=\frac{t^{N-1}t'(s)\,f^{(N)}(t)}{\pi i\varepsilon_N}. \tag{9}$$

Приравнивая теперь вещественные части этого уравнения друг другу, получим

$$\varphi(t)+\int \varphi(t_1)\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{t^{N-1}t'(s)}{t_1^{N-1}(t_1-t)}\right]ds_1=\mathrm{Re}\left[\frac{t^{N-1}t'(s)\,f^{(N)}(t)}{\pi i\varepsilon_N}\right]. \tag{10}$$

Это является интегральным уравнением Фредгольма, ядро и правая часть которого представляют функции класса H. Поэтому всякое решение его будет также функцией класса H.

Докажем теперь разрешимость уравнения (10).

Рассмотрим союзное однородное уравнение

$$\psi(t)+\int \psi(t_1)\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_1^{N-1}t'(s_1)}{t^{N-1}(t-t_1)}\right]ds_1=0, \tag{11}$$

которое можно записать еще так

$$\mathrm{Re}\left[\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int\frac{t_1^{N-1}\psi(t_1)}{t^{N-1}(t_1-t)}\,dt_1\right]=0. \tag{12}$$

Если уравнение (11) имеет решение, неравное тождественно нулю, то оно будет принадлежать классу H. Поэтому функция

$$\Phi(z)=\frac{1}{z^{N-1}}\cdot\frac{1}{\pi i}\int\frac{t_1^{N-1}\psi(t_1)}{t_1-z}\,dt_1 \tag{13}$$

будет H_0-голоморфной вне контура L и на бесконечности обращаться в нуль, как $\frac{1}{z^N}$.

Но, в силу (12) (§ 2 n° 1 (3)), имеем, что

$$\mathrm{Re}\,[\Phi^-(t)]=0 \qquad (\text{на } L).$$

Отсюда легко заключаем, что $\Phi(z)\equiv 0$ вне L. Но, в силу (13) и § 2 n° 2, это означает, что $t^{N-1}\psi(t)$ представляет граничные значения H_0-голоморфной функции в области T, т. е.

$$t^{N-1}\psi(t)=\Psi^+(t). \tag{14}$$

Из этого уравнения, в силу вещественности функции $\psi(t)$, получаем

$$\mathrm{Im}\,[t^{1-N}\Psi^+(t)]=0 \qquad (\text{на } L). \tag{15}$$

Но это есть частный вид однородной задачи Гильберта, изученной нами в § 2 n° 3. В данном случае $\alpha(t)=-it^{1-N}$ и индекс задачи равен $N-1\geqq 0$. Поэтому, в силу теоремы, доказанной нами в § 2 n° 3, однородная задача (15) имеет ровно $2N-1$ линейно независимых решений. Тогда из (14) легко заключим, что уравнение (11) имеет также $2N-1$ линейно независимых решений.

Следовательно, в силу теоремы Фредгольма, однородное уравнение, соответствующее уравнению (10), имеет также $2N-1$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что неоднородное уравнение (10) всегда разрешимо. В самом деле, пусть $\psi(t)$—решение (11). Тогда, в силу (14), имеем

$$\int \psi(t)\,\mathrm{Re}\left[\frac{t^{N-1}t'(s)\,f^{(N)}(t)}{\pi i \varepsilon_N}\right] ds=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i\varepsilon_N}\int t^{N-1}\psi(t)\,f^{(N)}(t)\,dt\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i\varepsilon_N}\int \Psi^{+}(t)\,f^{(N)}(t)\,dt\right]=0.$$

А это доказывает наше утверждение.

Таким образом, уравнение (10) разрешимо для любой H_N-голоморфной функции $f(z)$ и его решение имеет вид

$$\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_{2N-1}\varphi_{2N-1}(t)+\varphi^{*}(t), \tag{16}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2N-1}$—полная система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего (10); $\varphi^{*}(t)$—частное решение неоднородного уравнения (10), причем выбранное так, что $\varphi^{*}\equiv 0$, когда правая часть этого уравнения равна нулю; $c_1, \ldots, c_{2N-1}$—произвольные вещественные постоянные.

Докажем теперь, что функция $\varphi(t)$, определенная формулой (16), является также решением уравнения (9).

В самом деле, пусть $F(z)$—голоморфная функция в области T, соответствующая функции $\varphi(t)$ по формуле (2). Тогда, функция $G(z)=F(z)-f(z)$ является H_N-голоморфной и, в силу уравнения (10), удовлетворяет условию

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i\varepsilon_N}\,t^{N-1}t'(s)\;G^{(N)}(t)\right]=0.$$

Но это есть однородная задача Гильберта с индексом, равным $-N<0$ (§ 2 n° 3). Поэтому $G^{(N)}(z)\equiv 0$, т. е. $F^{(N)}(z)=f^{(N)}(z)$. А это доказывает наше утверждение.

В частности, отсюда вытекает, что функции $\varphi_k(t)$, т. е. решения однородного уравнения, соответствующего (10), удовлетворяют однородному уравнению, соответствующему (9). А это значит, что, если обозначим через

$f_k(z)$ голоморфную функцию, соответствующую $\varphi_k(t)$ по формуле (2) (при $C=0$), будем иметь $f_k^{(N)}(z)\equiv 0$ $(k=1, \ldots, 2N-1)$, т. е., что $f_k(z)$— полиномы не выше $N-1$-ой степени.

Подставляя выражение $\varphi(t)$ из формулы (16) в (2), получим

$$F(z)=f^*(z)+iC+c_1f_1(z)+\cdots+c_{2N-1}f_{2N-1}(z),$$

где обозначения очевидны, причем легко видеть, что

$$\mathrm{Im}[f^*(0)]=0, \qquad \mathrm{Im}[f_k(0)]=0, \qquad k=1, \ldots, 2N-1.$$

На основании этих условий, легко доказать, что полиномы

$$i, \; f_1(z), \ldots, f_{2N-1}(z)$$

—линейно независимы.

Поэтому нетрудно видеть, что всякий полином от z не выше $N-1$-ой степени представляется единственным образом линейным агрегатом этих функций с вещественными коэфициентами. Следовательно, вещественные постоянные C, c_1, ..., c_{2N-1} определяются однозначно из уравнения

$$f(z)-f^*(z)=iC+c_1f_1(z)+\cdots+c_{2N-1}f_{2N-1}(z),$$

так как левая часть его, в силу доказанного выше условия

$$f^{(N)}(z)=F^{(N)}(z),$$

представляет полином от z не выше $N-1$-ой степени.

Подставляя значения этих постоянных в формулу (16), мы получим однозначно определенную вещественную H-функцию $\varphi(t)$, при помощи которой функция $f(z)$ выразится формулой (2). Таким образом, лемма полностью доказана.

Примечание 1. Доказанная лемма сохраняет силу также и в случае конечной многосвязной области (см. мои работы [5, 6]).

Примечание 2. В случае бесконечной односвязной области лемма также сохраняет силу, если формулу (2) заменить формулой

$$f(z)=\int\varphi(t)\left(1-\frac{t}{z}\right)^{N-1}\lg\left(1-\frac{t}{z}\right)ds+\int\varphi(t)\,ds+iC. \tag{2'}$$

§ 4. Приведение задачи $\mathfrak{A}$ к сингулярному интегральному уравнению

Вернемся теперь к нашей задаче $\mathfrak{A}$ и приведем ее при помощи доказанной выше леммы к сингулярному интегральному уравнению.

1. Рассмотрим сперва случай $N \geqq 1$.

Так как искомая функция $f(z)$ должна быть H_N-голоморфной в области T, мы можем представить ее, согласно доказанной выше лемме, в следующем виде:

$$f(z) = \int \varphi(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{N-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int \varphi(t)\, ds + iC, \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$—вещественная H-функция, C—вещественная постоянная.

Рассмотрим функции

$$K_0(z, t) = \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{N-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1, \qquad (2)$$

$$K_m(z, t) = \frac{d^m}{dz^m}\left[\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{N-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right)\right]$$

$$= (-1)^m \frac{(N-1)\cdots(N-m)}{t^m} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{N-m-1} \left\{\lg\left(1 - \frac{z}{t}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \cdots + \frac{1}{N-m}\right\}, \quad (m = 1, 2, \ldots, N-1) \qquad (3)$$

$$K_N(z, t) = \frac{(-1)^N (N-1)!}{t^{N-1}(t-z)}, \qquad (4)$$

где t—произвольная точка на L, а z принадлежит области T. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать ту ветвь $\lg\left(1 - \frac{z}{t}\right)$, которая при $z=0$ обращается в нуль. Тогда $K_m(z, t)$ представляют голоморфные функции относительно z в области T для любой точки t, лежащей на L. Фиксируя произвольно t на L и переходя к пределу, когда z стремится изнутри области T к какой-нибудь другой точке t_0 кривой L, мы получим однозначно определенные функции $K_m(t_0, t)$ пары точек t_0 и t кривой L, которые, кроме функций K_{N-1} и K_N, принадлежат классу H на L относительно каждого аргумента.

Функция $K_{N-1}(t_0, t)$ имеет при $t = t_0$ особенность логарифмического типа, причем нетрудно видеть, что функция $|t_0 - t|^\varepsilon K_{N-1}(t_0, t)$ принадлежит классу H относительно каждого аргумента при любом $\varepsilon > 0$. Функция $K_N(t_0, t)$ имеет особенность типа $\frac{1}{t - t_0}$ в точке $t = t_0$.

После сделанных замечаний нетрудно видеть, что предельные значения функции $f(z)$ и ее производных до $N-1$-го порядка на L имеют вид

$$f(t)=\int \varphi(t_1)\, K_0(t,\ t_1)\, ds_1+iC,$$
$$f^{(m)}(t)=\int \varphi(t_1)\, K_m(t,\ t_1)\, ds_1 \tag{5}$$
$$(m=1,\ 2,\ldots,\ N-1).$$

Предельные значения производной N-го порядка функции $f(z)$, в силу (6) § 3, очевидно, будут иметь вид

$$f^{(N)}(t)=\varepsilon_N \pi i t^{1-N}\bar{t}'(s)\, \varphi(t)+\int \varphi(t_1)\, K_N(t,\ t_1)\, ds_1. \tag{6}$$

В силу формул (5) и (6), граничное условие ($\mathfrak{A}$) примет вид

$$A\varphi \equiv \alpha(t)\, \varphi(t)+\int K(t,\ t_1)\, \varphi(t_1)\, ds_1=b(t)-C\sigma(t), \tag{A}$$

где

$$\alpha(t)=\mathrm{Re}\,[\varepsilon_N \pi i t^{1-N}\bar{t}'(s)\, a_N(t)], \tag{7}$$

$$\sigma(t)=\mathrm{Re}\left[ia_0(t)+i\int h_0(t,\ t_1)\, ds_1\right], \tag{8}$$

$$K(t, t_1)=\sum_{m=0}^{N}\mathrm{Re}\left[a_m(t)\ K_m(t,\ t_1)\right.$$
$$\left.+\int h_m(t,\ t_2)\, K_m(t_2,\ t_1)\, ds_2\right]+\mathrm{Re}\,[h_N(t,\ t_1)\, \varepsilon_N \pi i t_1{}^{1-N}\bar{t}_1{}'(s_1)]. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $\varphi(t)$ мы получили интегральное уравнение (A). Это уравнение сингулярное, так как его ядро, как это легко вытекает из (2), (3), (4) и (9), имеет вид[1]

$$K(t,\ t_1)=\frac{k(t,\ t_1)}{t-t_1},$$

где $k(t,\ t_1)$ — функция, принадлежащая классу H относительно каждого аргумента; функции $\alpha(t)$ и $\sigma(t)$, как видно из формул (7) и (8), принадлежат классу H.

[1] В частности, это очевидно в одном важном случае, когда функции h_k имеют вид

$$h_k(t,\ t_1)=h_k^*(t,\ t_1)/|t-t_1|^{\lambda}, \qquad k=0,\ 1,\ldots,\ N,$$

где $\lambda<1$, а h_k^* — функции класса H относительно каждого аргумента.

2. Рассмотрим теперь случай $N=0$. Тогда граничное условие ($\mathfrak{A}$) имеет вид

$$\mathrm{Re}\left[a_0(t)f(t)+\int h_0(t,\ t_1)f(t_1)\,ds_1=b(t)\right]. \tag{10}$$

В этом случае решение задачи $\mathfrak{A}$, согласно лемме, мы можем искать в виде

$$f(z)=\int\frac{\varphi(t)\,t}{t-z}\,ds+iC, \tag{11}$$

где C—вещественная постоянная, а $\varphi(t)$—вещественная функция, принадлежащая классу H. Переходя к пределу, когда точка z изнутри T приближается к граничной точке t, получим

$$f(t)=\pi i t\bar{t}'(s)\,\varphi(t)+\int\frac{t_1\varphi(t_1)}{t_1-t}\,ds_1+iC.$$

Вносяэто выражение в граничное условие (10), получим интегральное уравнение вида (A), причем и в данном случае функции $\alpha(t)$, $\sigma(t)$, $K(t,\ t_1)$ определяются с помощью формул (7), (8), (9) при $N=0$.

§ 5. Исследование полученного интегрального уравнения

1. В предыдущем параграфе мы свели решение задачи $\mathfrak{A}$ к сингулярному интегральному уравнению (A). Как показывает сам вывод, это интегральное уравнение полностью эквивалентно краевой задаче $\mathfrak{A}$.

Регуляризируя теперь уравнению (A), например, по способу, указанному нами в § 2 n° 4, мы получим регулярное интегральное уравнение Фредгольма с известным ядром, вполне эквивалентное задаче $\mathfrak{A}$ и при помощи решения этого интегрального уравнения мы можем зядачу $\mathfrak{A}$ решить до конца.

На основании общих свойств сингулярных интегральных уравнений, отмеченных нами в § 2 n° 4, мы можем, и не переходя к регулярным уравнениям Фредгольма, из непосредственного рассмотрения уравнения (A), вывести условия разрешимости задачи $\mathfrak{A}$; причем, конкретный вид ядра уравнения (A) позволит нам придать этим условиям различные формы, которые во многих частных случаях могут оказаться весьма полезными.

2. По формулам, указанным в § 2 n° 4, легко найдем, что для того, чтобы уравнение (A), соответствующее нашей задаче $\mathfrak{A}$, было нормального типа, необходимо и достаточно выполнение условия

$$a_N(t)\neq 0 \qquad \text{(всюду на } L). \tag{1}$$

При соблюдении этого условия, задачу $\mathfrak{A}$ мы будем называть задачей *нормального типа*, причем, во всем дальнейшем мы будем рассматривать исключительно задачи такого вида. При этом, в силу (1), не ограничивая общности, мы можем положить

$$|a_N(t)| = 1.$$

Вычисляя теперь индекс интегрального уравнения (A), мы найдем, что

$$\operatorname{Ind}(A) = n = 2(p+N), \tag{2}$$

где

$$p = \frac{1}{2\pi}\{\arg a_N(t)\}_L. \tag{3}$$

Таким образом, мы видим, что индекс сингулярного уравнения (A), соответствующего задаче $\mathfrak{A}$ нормального типа—четное целое число или нуль.

3. Рассмотрим однородное уравнение, союзное с $A\varphi = 0$

$$A'\psi = \alpha(t)\,\psi(t) + \int K(t_1, t)\,\psi(t_1)\,ds_1 = 0 \tag{A_0'}$$

и пусть ν'—число линейно независимых решений этого уравнения.

Тогда, в силу теоремы Нетера (§ 2 n° 4),

$$\nu - \nu' = n, \tag{4}$$

где ν—число линейно независимых решений уравнения $A\varphi = 0$.

Выясним теперь необходимые и достаточные условия для того, чтобы задача $\mathfrak{A}$ имела решение для любой правой части $b(t)$ и, кроме того, найдем вид этого решения.

Теорема. *Для того, чтобы задача $\mathfrak{A}$ имела решение для любой правой части $b(t)$, необходимо и достаточно, или чтобы уравнение (A_0') не имело решения ($\nu' = 0$), или же чтобы оно имело единственное решение $\psi(t)$, удовлетворяющее условию*

$$\int \psi(t)\,\sigma(t)\,ds \neq 0. \tag{5}$$

При этом необходимо $n \geqq 0$ и решение задачи $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$$f(z) = f^*(z) + Cf_0(z) + C_1 f_1(z) + \cdots + C_n f_n(z), \tag{6}$$

при $\nu' = 0$ и

$$f(z) = f^*(z) + C_1 f_1(z) + \cdots + C_n f_n(z), \tag{7}$$

когда $\nu' = 1$ и выполняется условие (5), где $C, C_1, \ldots, C_n$—произвольные вещественные постоянные, $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$—линейно независимые H_N-голоморфные функции, удовлетворяющие однородной задаче $\mathfrak{A}_0$, $f^*(z)$—частное решение неоднородной задачи $\mathfrak{A}$.

Однородная задача $\mathfrak{A}$ имеет $n+1$ линейно независимых решений, когда $\nu' = 0$ и она имеет n линейно независимых решений, когда $\nu' = 1$ и имеет место (5).

Доказательство. Докажем сперва достаточность. a) Если $\nu'=0$, то, в силу теоремы Нетера, уравнение (A) разрешимо для любой правой части, т. е. для любой функции $b(t)$ и любой постоянной C. Однородное уравнение $A\varphi=0$, в силу (4), имеет $\nu=n$, $n\geqq 0$, линейно независимых решений. Следовательно, общее решение уравнения (A) имеет вид

$$\varphi(t)=\varphi^*(t)+C\varphi_0(t)+C_1\varphi_1(t)+\cdots+C_n\varphi_n(t), \tag{8}$$

где $C, C_1, \ldots, C_n$—произвольные вещественные постоянные, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$—линейно независимые решения однородного уравнения $A\varphi=0$, φ^* и φ_0—частные решения уравнений $A\varphi=b$, $A\varphi=-\sigma$ соответственно, причем подобранные так' что $\varphi^*\equiv 0$, $\varphi_0\equiv 0$, соответственно при $b\equiv 0$, $\sigma\equiv 0$.

Из (8), в силу формул (1) и (11) § 4, для искомого решения получаем формулу (6), где обозначения очевидны, причем, легко увидим, что

$$\operatorname{Im}[f_0(0)]=1, \quad \operatorname{Im}[f_k(0)]=0, \qquad k=1, \ldots, n.$$

Отсюда легко вытекает, что функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$—линейно независимы. Следовательно, однородная задача $\mathfrak{A}_0$ при $\nu=0$ имеет $n+1$ линейно независимых решений.

b) Пусть $\nu'=1$ и имеет место условие (5). Тогда уравнение (A) будет разрешимым лишь при выполнении условия

$$\int\psi(t)[b(t)-C\sigma(t)]\,ds=0.$$

Отсюда, в силу (5), C определяется однозначно и, следовательно, в этом случае задача $\mathfrak{A}$ всегда разрешима для любой функции $b(t)$, причем решение очевидно имеет вид (7), так как в формуле (6) C получит вполне определенное значение. Нетрудно также видеть, что однородная задача $\mathfrak{A}_0$ имеет в этом случае n линейно независимых решений.

Переходим теперь к доказательству необходимости.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_{\nu'}$—полная ортогональная система линейно независимых решений уравнения (A'_0) и пусть задача $\mathfrak{A}$ имеет решение для любой функции $b(t)$. Тогда и интегральное уравнение (A) будет иметь решение для любой функции $b(t)$ и, следовательно,

$$\int\psi_j(t)[b(t)-C\sigma(t)]\,ds=0, \qquad j=1,\ 2, \ldots, \nu'. \tag{9}$$

Мы должны доказать, что $\nu'=0$ или 1, причем в последнем случае обязательно должно иметь место условие (5). Пусть $\nu'>1$.

Разберем в отдельности два возможных случая: 1) все числа

$$\int\sigma(t)\,\psi_j(t)\,ds=0, \quad j=1, \ldots, \nu',$$

2) по крайней мере одно из них, например,

$$\int \sigma(t)\, \psi_1(t)\, ds \neq 0. \tag{10}$$

Первое допущение при $\nu' \geqq 1$ невозможно, так как тогда неосуществимо условие (9) при любой функции $b(t)$.

Во втором случае, полагая $b(t)=\psi_2(t)$, из (9) при $j=1, 2$, в силу (10), получим, что $C=0$,

$$\int \psi_2^2(t)\, ds = 0,$$

что, очевидно, невозможно, если $\psi_2 \neq 0$. Таким образом, доказано, что $\nu' \leqq 1$, причем, если $\nu'=1$, то обязательно имеет место (5). Следовательно, наша теорема полностью доказана.

Следствие. *Если $\sigma(t) \equiv 0$, то задача $\mathfrak{A}$ имеет решение для любой правой части $b(t)$ тогда и только тогда, когда $\nu'=0$, причем решение в этом случае имеет вид (6), где надо положить $f_0(z)=i$.*

В самом деле, легко заметить, что при $\sigma \equiv 0$ условие (5) нарушается и, кроме того, что в формуле (8) $\varphi_0=0$.

Если условия доказанной выше теоремы не выполняются (что имеет место, например, при $n<0$), то задача $\mathfrak{A}$, вообще говоря, решения не имеет; решение существует тогда и только тогда, когда имеют место условия (9).

Рассмотрим два возможных случая: 1) все числа

$$\int \psi_j \sigma ds = 0, \quad j=1, \ldots, \nu'.$$

2) по крайней мере одно из них, например,

$$\int \psi_1 \sigma ds \neq 0.$$

В первом случае задача будет иметь решение, очевидно, лишь при условии, что

$$\int b \psi_j ds = 0, \quad j=1, \ldots, \nu',$$

причем однородная задача $\mathfrak{A}_0$ будет иметь ровно $n+\nu'+1$ линейно независимых решений.

Во втором случае ν' обязательно >1 и из (9) при $j=1$ C определится однозначно, причем условие разрешимости задачи $\mathfrak{A}$ в этом случае имеет вид

$$\int \psi_j^* b ds = 0, \qquad j=1, \ldots, \nu'-1,$$

где

$$\psi_{j-1}^* = \psi_j - \psi_1 \frac{\int \sigma \psi_j ds}{\int \sigma \psi_1 ds}, \qquad j=2, \ldots, \nu'.$$

При этом, в отличие от предыдущего случая, однородная задача $\mathfrak{A}_0$ имеет $n+\nu'$ линейно независимых решений.

Число n в обоих разобранных случаях может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения, причем в последнем случае, очевидно, соблюдается условие $n+\nu'\geqq 0$.

Нетрудно заметить, что однородная задача $\mathfrak{A}_0$ не имеет решения лишь в случае 2) и то тогда, когда $n+\nu'=0$.

4. Выше мы показали, что вопрос о разрешимости или неразрешимости задачи $\mathfrak{A}$ выясняется исследованием уравнения (A_0'). Поэтому чрезвычайно важно иметь признаки, позволяющие судить о том, в каких случаях уравнение (A'_0) имеет решения и в каких—не имеет. Ниже мы укажем несколько таких признаков.

Рассмотрим функцию

$$\Omega^*(t_1, z)=\sum_{m=0}^{N}\left[a_m(t_1)\,K_m(t_1, z)+\int h_m(t_1, t_2)\,K_m(t_2, z)\,ds_2\right], \tag{11}$$

которая, на основании формул (2), (3), (4) § 4, является H_0-голоморфной в области T' относительно z, какова бы ни была точка t_1, лежащая на L; причем

$$\Omega^*(t_1, \infty)=a_0(t_1)+\int h_0(t_1, t_2)\,ds_2\equiv a_0^*(t_1). \tag{12}$$

Используя свойства интегралов типа Коши (формулу (3) § 2 n° 1), и принимая во внимание формулы (2), (3), (4) § 4, легко найдем, что уравнение (A_0') имеет вид

$$\mathrm{Re}\,[\Psi^-(t)]=0,$$

где

$$\Psi(z)=\int\psi(t)\,\Omega^*(t, z)\,ds. \tag{13}$$

Отсюда, в силу того, что

$$\Psi(\infty)=\int\psi(t)\,a_0^*(t)\,ds,$$

получим

$$\Psi(z)=iC, \text{ (в области } T'), \tag{14}$$

где C—вещественная постоянная, очевидно, равная

$$C=\int\psi(t)\,\mathrm{Im}\,[a_0^*(t)]\,ds. \tag{15}$$

Если ввести функцию

$$\Omega(t, z)=\Omega^*(t, z)-i\,\mathrm{Im}\left[a_0(t)+\int h_0(t, t_1)\,ds_1\right], \tag{16}$$

которая является H_0-голоморфной вне L относительно z для любой t, лежащей на L, в силу (13) и (15), уравнение (14) примет вид

$$\int \psi(t)\,\Omega(t, z)\,ds = 0 \qquad (\text{для всех } z \text{ в области } T'). \tag{17}$$

Функция $\Omega(t, z)$, в силу (16) и (12), на бесконечности удовлетворяет условию

$$\Omega(t, \infty) = \mathrm{Re}\left[\, a_0(s) + \int h_0(t, t_1)\, ds_1 \right].$$

Уравнение (17), очевидно, эквивалентно уравнению (A_0').

В силу теоремы единственности аналитических функций, уравнение (17), очевидно, равносильно любому из следующих трех условий:

$$\int \psi(t)\,\Omega(t, c_k)\,ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$\int \psi(t)\,\Omega_k(t, c)\,ds = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

$$\int \psi(t)\,\chi_k(t)\,ds = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

где $c_1, c_2, \ldots$ — какая-нибудь бесконечная последовательность точек области T', имеющая, по крайней мере, одну предельную точку, лежащую внутри T'; в частности, предельной точкой может служить бесконечно удаленная точка.

$$\Omega_k(t, c) = \left.\frac{d^k\Omega(t, z)}{dz^k}\right|_{z=c}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

причем c — какая-нибудь точка, лежащая в конечной части области T'.

Наконец, функции $\chi_k(t)$ пропорциональны коэфициентам разложения в ряд Лорана функции $\Omega(t, z)$ вблизи бесконечности по степеням z и, как легко найти из (16) и (11) при помощи формул (2), (3), (4) § 4, имеют вид

$$\chi_0(t) = \mathrm{Re}\left[\, a_0(t) + \int h_0(t, t_1)\, ds_1 \right],$$

$$\chi_k(t) = \mathfrak{L}(t^k), \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\mathfrak{L}(f) \equiv \sum_{m=0}^{N}\left[a_m(t) f^{(m)}(t) + \int h_m(t, t_1) f^{(m)}(t_1)\, ds_1 \right].$$

Легко видеть, что системы функций $\{\Omega(t, c_k)\}$, $\{\Omega_k(t, c)\}$, $\{\chi_k(t)\}$ представляют функции класса H. Таким образом, нами доказано, что интегральные уравнения (A'_0), (17) и системы уравнений (18), (19), (20) эквивалентны между собой, т. е., если существует такая вещественная H-функция $\psi(t)$, которая удовлетворяет одному из уравнений (A'_0) и (17) или же одной из систем (18), (19), (20), то она будет удовлетворять также и всем остальным.

В силу ограниченности числа линейно независимых решений уравнения (A'_0), очевидно, что уравнение (17) и каждая из систем уравнений (18), (19), (20) может иметь лишь конечное число линейно независимых вещественных решений, принадлежащих классу H. Это свойство перечисленных уравнений мы будем в дальнейшем называть *квазиполнотой* ядра $\Omega(t, \zeta)$ $(t \in L, \zeta \in T')$ и систем функций $\{\Omega(t, c_k)\}$, $\{\Omega_k(t, c)\}$, $\{\chi_k(t)\}$.

В частности, перечисленные системы функций и ядро $\Omega(t, \zeta)$ будем называть *полными*, если уравнение (A'_0) не имеет решения.

Число линейно независимых решений этого уравнения мы будем еще называть *дефектом* квазиполного ядра $\Omega(t, \zeta)$ или квазиполных систем функций $\{\Omega(t, c_k)\}$, $\{\Omega_k(t, c)\}$, $\{\chi_k(t)\}$.

Таким образом, условия разрешимости задачи $\mathfrak{A}$ мы свели к условиям полноты или квазиполноты определенных систем функций, связанных очень просто с коэфициентами задачи $\mathfrak{A}$. На основании вышедоказанной теоремы мы можем теперь высказать следующее предложение:

Для того, чтобы задача $\mathfrak{A}$ имела решение для произвольной правой части $b(t)$ необходимо и достаточно, чтобы или система функций $\{\chi_k(t)\}$ была полной или же она была квазиполной с дефектом, равным единице, причем в последнем случае необходимо должно выполняться условие (5), где $\psi(t)$ — функция, удовлетворяющая условиям (20).

В этом предложении, как легко видеть, систему функций $\{\chi_k(t)\}$ можно заменить любой из системи $\{\Omega_k(t, c)\}$, $\{\Omega(t, c_k)\}$.

§ 6. Задачи Пуанкаре и Гильберта

В этом параграфе мы рассмотрим, в качестве примера, приложение указанного выше способа к решению задач Пуанкаре и Гильберта, которые, как нами отмечалось во введении, представляют частные случаи задачи $\mathfrak{A}$. Мы начнем с задачи Пуанкаре, так как задача Гильберта может быть рассмотрена, как частный случай первой.

1. Задачу Пуанкаре мы можем сформулировать в следующем виде [1]:

[1] Задачу Пуанкаре при помощи сингулярных интегральных уравнений (полученных, между прочим, самим Пуанкаре) изучил недавно в случае произвольной многосвязной области Б. В. Хвеледидзе [11, 12]. Им же рассмотрена задача Пуанкаре и в случае

Требуется определить H_1-голоморфную в области T функцию $f(z)=u+iv$, вещественная часть которой удовлетворяет граничному условию

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial x}+B(s)\frac{\partial u}{\partial y}+C(s)\,u=D(s) \qquad (\text{на } L), \tag{P}$$

где A, B, C, D—вещественные функции, заданные на L и принадлежащие классу H, причем $A^2+B^2=1$ всюду на L.

Граничное условие (P) мы можем еще записать так

$$\operatorname{Re}[(A+iB)f'(z)+Cf(z)]=D. \tag{P}$$

Следовательно, (P) представляет частный случай ($\mathfrak{A}$) ($N=1$, $h_0=h_1=0$, $a_1=A+iB$, $a_0=C$, $b=D$).

Прежде всего легко видеть, что, если функция $f(z)$ удовлетворяет граничному условию (P), то и $f(z)+ic$, где c—произвольная вещественная постоянная, также удовлетворяет ему. Поэтому, искомую фучкцию мы можем подчинить условию

$$\operatorname{Im}[f(0)]=0. \tag{1}$$

В силу этого условия, согласно нашей леммы, искомая функция $f(z)$ в данном случае ($N=1$) может быть представлена в виде

$$f(z)=\int\varphi(t)\lg\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int\varphi(t)\,ds,$$

где $\varphi(t)$—вещественная H-функция, а интегральное уравнение (A), очевидно, будет иметь вид[1]

$$A\varphi\equiv\operatorname{Re}[-\pi i\bar{t}'(s)(A+iB)]\,\varphi(t)$$

$$+\int\varphi(t_1)\operatorname{Re}\left[C(s)\lg e\left(1-\frac{t}{t_1}\right)-\frac{A(s)+iB(s)}{t_1-t}\right]ds_1=D(s). \tag{AP}$$

Индекс этого уравнения, в силу (2), (3) § 5, будет

$$n=2(p+1), \qquad p=\frac{1}{2\pi}\{\arg(A-iB)\}_L.$$

эллиптического уравнения вида

$$\Delta u+a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+c(x,\ y)\,u=0, \tag{*}$$

где a, b, c—целые функции своих аргументов; используя найденное нами общее представление всех решений уравнения (*) и следуя предложенному выше способу интегральных представлений голоморфных функций, Б. В. Хведелидзе приводит задачу к сингулярному уравнению нормального типа [13].

[1] Это интегральное уравнение было получено Б. В. Хведелидзе [12].

Союзное с (AP) однородное уравнение будет

$$A'\psi \equiv \operatorname{Re}\left[-\pi i t'(s)(A+iB)\right]\psi(t)$$

$$+\int \psi(t_1)\operatorname{Re}\left[C(s_1)\lg e\left(1-\frac{t_1}{t}\right)-\frac{A(s_1)+iB(s_1)}{t-t_1}\right]ds_1=0. \qquad (\mathrm{A'P_0})$$

Это уравнение, в силу n° 4 § 5 (формула (17)), эквивалентно уравнению

$$\int \psi(t)\left[\frac{A(s)+iB(s)}{t-z}+C(s)\lg e\left(1-\frac{t}{z}\right)\right]ds=0, \qquad (2)$$

где z произвольная точка вне L.

Так как в нашем случае функция $\sigma(t)\equiv 0$, из следствия теоремы предыдущего параграфа, принимая во внимание условие (1), получим теорему:

Теорема. *Для того, чтобы задача* (P) *имела решение для любой функции* $D(s)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *не имело решения. При этом необходимо* $n\geqq 0$ *и решение задачи* (P) *имеет вид*

$$u=u^*+C_1u_1+\cdots+C_nu_n,$$

где u^* *— частное решение неоднородной задачи* (P), *а* $u_1, \ldots, u_n$ *— линейно независимые решения однородной задачи* (P_0), *соответствующей* (P), $C_1, \ldots, C_n$ *— произвольные постоянные.*

Однородная задача (P_0) имеет ровно n линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_n$.

Предположим теперь, что уравнение (2) имеет ν' линейно независимых вещественных решений $\psi_1, \ldots, \psi_{\nu'}$. Тогда задача Пуанкаре (P), которая эквивалентна интегральному уравнению (AP), разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int D\psi_j\,ds=0, \qquad j=1, \ldots, \nu', \qquad (3)$$

при этом решение задачи имеет вид

$$u=u^*+C_1u_1+\cdots+C_{n+\nu'}u_{n+\nu'},$$

где обозначения очевидны. В частности, однородная задача (P_0) имеет $n+\nu'$ линейно независимых решений.

При этом n может принимать и отрицательные значения и если $n+\nu'=0$, то задача (P) при условиях (3) имеет единственное решение.

Особо отметим случай $n=0$ и $\nu'=0$, так как это единственный случай, когда задача (P) разрешима для произвольной функции $D(s)$ и притом имеет единственное решение.

2. Уравнение (2), очевидно, эквивалентно любой из следующих систем уравнений

$$\int \psi(t)\,\Omega(t,\ c_k)\,ds=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\int \psi(t)\,\Omega_k(t,\ c)\,ds=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\int \psi(t)\,\chi_k(t)\,ds=0, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — произвольная бесконечная последовательность точек в области T', имеющая по крайней мере одну предельную точку, принадлежащую этой области. В частности, предельной точкой может быть и бесконечно удаленная точка.

$$\Omega(t,\ c_k)=\frac{A(s)+iB(s)}{t-c_k}+C(s)\lg e\left(1-\frac{t}{c_k}\right); \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\Omega_0(t,\ c)&=\frac{A(s)+iB(s)}{t-c}+C(s)\lg e\left(1-\frac{t}{c}\right)\\ \Omega_k(t,\ c)&=k!\,\frac{A(s)+iB(s)}{(t-c)^{k+1}}+(k-1)!(-1)^{k-1}C(s)\left[\frac{1}{(t-c)^k}-\frac{1}{t^k}\right]\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots)$$

c — какая-нибудь фиксированная точка в области T';

$$\chi_k(t)=k(A+iB)\,t^{k-1}+C(s)\,t^k, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{6}$$

Таким образом, полнота одной из систем функций $\{\Omega(t,\ c_k)\}$, $\{\Omega_k(t,\ c)\}$, $\{\chi_k(t)\}$ является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Пуанкаре (P) для произвольной правой части $D(s)$.

Заметим также, что если перечисленные системы функций не являются полными, то они во всяком случае являются квазиполными системами, причем, как легко видеть, дефект равен минимальному числу линейно независимых функций, при добавлении которых эти системы сделаются полными.

3. Пусть $A=\cos(\nu,\ x)$, $B=\sin(\nu,\ x)$, где ν — внешняя нормаль кривой L. Тогда граничное условие (P) примет вид

$$\frac{du}{d\nu}+C(s)\,u=D(s), \tag{P'}$$

причем $A+iB=-it'(s)$ и интегральное уравнение (AP) принимает вид

$$\pi\varphi(s)+\int\varphi(s_1)\,\mathrm{Re}\left[\,C(s)\lg\left(1-\frac{t}{t_1}\right)+\frac{it'(s)}{t_1-t}\right]ds=D(s). \tag{AP'}$$

Легко видеть, что это есть квазирегулярное уравнение Фредгольма.

Из доказанной выше теоремы легко вытекает, что, если задача (P') имеет решение для любой функции $D(s)$ и $C(s)\neq 0$, то это решение будет единственным, так как для задачи (P') $n=0$.

Отметим также, что система функции $\chi_k(t)$ в данном случае имеет вид

$$\chi_k(t) = -ikt^{k-1}t'(s) + C(s)\,t^k$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если, например, L—окружность, уравнение которой имеет вид $|t|=1$ а $C=\text{const}$, то система функции $\chi_k(s)$ будет

$$\chi_k(t) = t^k(k+C) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Эта система полная во всех случаях, кроме $C=-m$, где m—нуль или целое положительное число. В этом случае из этой системы выпадает функция t^m, что и нарушает полноту; причем легко видеть, что в этом исключительном случае задача (P') имеет решение тогда и только тогда, когда $D(s)$ удовлетворяет условию

$$\int D(s)\,t^m\,ds = 0.$$

4. Пусть $C(s)\equiv 0$[1]. Тогда условие (P) примет вид

$$Au_x + Bu_y = D. \tag{P''}$$

Очевидно, что решение будет определятся лишь с точностью до произвольной постоянной слагаемой, поэтому в дальнейшем два решения этой задачи, отличающиеся на постоянную слагаемую, будем считать одинаковыми.

Если ввести теперь новую H_0-голоморфную функцию

$$F(z) = U + iV = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

задача (P'') примет вид

$$AU - BV = D, \tag{H}$$

т. е. мы получим задачу Гильберта. Задачи (P'') и (H) одновременно разрешимы или неразрешимы, поэтому условия разрешимости одной из них будут вместе с тем и условиями разрешимости другой. Задачу (H) мы уже изучили в § 2 n° 3. Поэтому мы можем теперь высказать определенные признаки разрешимости задачи (P''). А именно, задача (P'') имеет решение для произвольной функции $D(s)$ тогда и только тогда, когда $p\geqq 0$, причем в этом случае однородная задача имеет $2p+1$ линейно независи-

[1] Этот случай изучен подробно в большой работе A. Liénard'a [14], который решение этой задачи сводит к двум задачам Дирихле и дает критерий существования решения.

мых решений. Если же $p<0$, то задача (P″) имеет решение и притом единственное лишь тогда, когда $D(s)$ удовлетворяет $-2p+1$ условиям

$$\int D\psi_j\, ds=0, \qquad j=1, \ldots, -2p+1,$$

где ψ_j—линейно независимые решения уравнения

$$\int \psi(t)\, \frac{A+iB}{t-\zeta}\, ds=0. \tag{7}$$

Легко доказать, что это уравнение имеет $-2p+1$ линейно независимых решений.

В самом деле, (7) равносильно уравнению

$$\psi(t)(A+iB)\bar{t}'=\Phi^+(t).$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Im}[(A-iB)\, t'\Phi^+(t)]=0.$$

Но это есть задача Гильберта с индексом, равным $1-p\geqq 0$. Следовательно, она имеет ровно $-2p+1$ линейно независимых решений, что и доказывает наше утверждение.

В частности, мы получили, что системы функций (4), (5) и (6) являются полными при $C\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $p\geqq 0$.

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 20.7.1942)

ილია ვეკუა

რიმანის ერთი წრფივი სასაზღვრო ამოცანის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში შეისწავლება შემდეგი ამოცანა:

საძიებელია სასრულ მარტივადბმულ T არეში ჰოლომორფული ფუნქცია $f(\zeta)$, რომელიც საზღვარზე L-აკმაყოფილებს პირობას

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N}\left[a_k(t)\, f^{(k)}(t)+\int h_k(t,\ t_1)\, f^{(k)}(t_1)\, ds_1\right]\right\}=b(t), \tag{ა}$$

სადაც N ნატურალური რიცხვია ან ნული, $a_k(t)$, $b(t)$ მოცემული ფუნქციებია L-ზე, რომელნიც ჰელდერის პირობებს აკმაყოფილებენ, $h_k(t, t_1)$ აგრეთვე მოცემული ფუნქციები არიან, რომელნიც საკმარისად ზოგად პირობებს ემორჩილებიან.

ეს ამოცანა წარმოადგენს ჰ ი ლ ბ ე რ ტ ი ს ა და პ უ ა ნ კ ა რ ე ს ცნობილი ამოცანების გაზოგადებას და მნიშვნელოვანი კერძო სახეა ანალიზური ფუნქციათა თეორიის ზოგადი სასაზღვრო ამოცანისა, რომელიც პირველად დასმული იყო რ ი მ ა ნ ი ს მიერ [1].

ანალიზური ფუნქციების ერთი ახალი ინტეგრალური წარმოდგენის საშუალებით ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებამდე, რომელიც დასმული ამოცანის ეკვივალენტურია. მიღებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლება ეკუთვნის კარგად შესწავლილ ინტეგრალურ განტოლებათა კლასს [8]. ამ განტოლების გამოკვლევით მიღებულია დასმული ამოცანის ამოხსნადობის რიგი აუცილებელი და საკმარისი პირობებისა.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ციტირებული ლიტერატურა--ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. B. Riemann. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grosse. Werke, S. 3—43. Leipzig, 1876.
2. D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig—Berlin, 1924, S. 81—108.
3. H. Poincaré. Leçons de mécanique céleste, t. III. Theorie de marees. Paris, 1910.
4. Ф. Д. Гахов. Линейные краевые задачи теории функции комплексной переменной Известия Казанского физ.-мат. общества, т. X, сер. 3, 1938
5. Илья Векуа. Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, т. II, № 6, 1924, стр. 477—484.
6. Илья Векуа. Дополнения к работе «Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении». Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, т. II, № 8, 1942, стр. 701—704.
7. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. шестое, 1940, стр. 166—172.
8. Илья Векуа. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши. Труды Тбилисского Математического Института, т. X, 1941, стр. 45—72.
9. F. Noether. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 82. 1921, S. 42—63.
10. Илья Векуа. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, т. II, № 7, 1941, стр. 579—586.
11. Б. В. Хведелидзе. О краевой задаче Пуанкаре. Доклады АН СССР, т. XXX, № 3, 1941.
12. Б. В. Хведелидзе. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР, т. II, №№ 7, 10, 1941, стр. 571—578, 865—872.
13. Б. В. Хведелидзе. Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа (диссертация).
14. A. Liénard. Problème plan de la dérivée oblique dans la theorie du potential. Juornal de l'École Polytechnique, III-e serie, NoNo 5, 6, 7, 9. 1938, 1939.