საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, ტ. III, № 2, 1942
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, Т. III, № 2, 1942
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, V. III, No 2, 1942

МАТЕМАТИКА

ИЛЬЯ ВЕКУА

ОБ АПРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. В этой работе я доказываю несколько теорем о приближении решений уравнения

$$\Delta u+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b\,(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)\,u=0 \tag{E_0}$$

при помощи частных решений этого же уравнения в любой конечной многосвязной области плоскости xy[1]. При этом, во всем дальнейшем я предполагаю, что a, b и c—целые функции переменных x, y.

2. Пусть T—конечная многосвязная область на плоскости xy, ограниченная простыми замкнутыми непересекающимися кривыми $S_0, S_1, \ldots, S_m$, $m\geqq 0$, из которых S_0 содержит внутри себя все остальные. Положим $S=S_0+S_1+\cdots+S_m$ и условимся считать положительным направлением на S то, которое оставляет область T слева.

Во всем дальнейшем будем считать, что начало координат находится внутри области T.

Пусть $\mathfrak{M}_0$—множество всех голоморфных функций $f(z)$ в области T, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im}\{f(0)\}=0,$$

а $\mathfrak{M}$—множество конечных множеств вида

$$\{f(z),\ c_1,\ \ldots,\ c_m\},$$

где $f(z)\in\mathfrak{M}_0$, а $c_1, \ldots, c_m$—произвольные вещественные постоянные.

Пусть, далее, $\mathfrak{L}$—множество всех регулярных решений $u(x, y)$ уравнения (E_0) в области T[2].

Зафиксируем внутри кривых $S_1, \ldots, S_m$ соответственно точки $a_1, \ldots, a_m$ и рассмотрим множество $\mathfrak{P}$ рациональных функций

$$P(z;\ \infty,\ a_1,\ \ldots,\ a_m)\equiv P(z),$$

имеющих полюсы только в точках $\infty, a_1, \ldots, a_m$.

[1] Аналогичной проблеме посвящена работа Ст. Бергмана [1], в которой рассматривается лишь случай конечной односвязной области, ограниченной выпуклой кривой.

[2] Регулярным в области T решением называется решение уравнения (E_0), имеющее непрерывные производные до второго порядка в этой области. Известно, что всякое регулярное решение является, в соответствующей области, аналитической функцией (теорема Пикара).

Очевидно, любая функция $P(z) \in \mathfrak{P}$ представляет собою конечную сумму функций вида

$$A_k^0 z^k, \quad \frac{A_{kj}}{(z-a_j)^k} \qquad (j=1, \ldots, m; \; k=0, 1, \ldots),$$

где A_k^0, A_{kj} — постоянные.

Обозначим, наконец, через

$$\Omega(z, a_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, m)$$

«элементарное» решение уравнения (E_0), которое регулярно во всей плоскости xy, кроме точки a_j, в которой оно имеет особенность логарифмического типа.

Приведем теперь без доказательства следующие две теоремы, на которые будем опираться во всем дальнейшем.

Теорема А[1]. *Между множествами $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ существует одно-однозначное соответствие, которое устанавливается формулой*

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{m} c_j \Omega(z, a_j) + L[f(z)],$$

где

$$\{f(z), c_1, \ldots, c_m\} \in \mathfrak{M}, \quad u(x, y) \in \mathfrak{L}, \quad a \quad L[f(z)]$$

— определенный линейный оператор в функциональном пространстве $\mathfrak{M}_0$.

Теорема В[2]. *Всякую функцию $f(z)$, голоморфную в области T и непрерывную в $T+S$, можно равномерно апроксимировать в $T+S$ при помощи рациональных функций $P(z; \infty, a_1, \ldots, a_m)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая рациональная функция $P(z) \in \mathfrak{P}$, что*

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon$$

для всех $z \in T+S$.

3. Рассмотрим следующую последовательность частных решений уравнения (E_0):

$$u_0(x, y; a_0) = L[f(z) \equiv 1],$$

$$u_0(x, y; a_k) = \Omega(z, a_k),$$

$$u_{2n-1}(x, y; a_0) = L[z^n],$$

$$u_{2n}(x, y; a_0) = L(iz^n),$$

$$u_{2n-1}(x, y; a_k) = L\left[\frac{1}{(z-a_k)^n}\right],$$

[1] Эта теорема установлена мною в [2]; см. также [3].

[2] Доказательство этой теоремы можно найти в монографии I. Walsh [4].

$$u_{2n}(x,\ y;\ a_k)=L\left[\frac{i}{(z-a_k)^n}\right]$$

$$(k=1,\ \ldots,\ m;\quad n=1,\ 2,\ \ldots;\ a_0=\infty).$$

Обозначая

$$u_p(x,\ y;\ a_k)=w_{pm+p+k}\qquad (k=1,\ \ldots,\ m;\ p=0,\ 1,\ \ldots),$$

получим последовательность частных решений уравнения (E_0)

$$w_0(x,\ y),\quad w_1(x,\ y),\ \ldots,\ w_n(x,\ y),\ \ldots,$$

которая представляет систему линейно независимых аналитических функций в $T+S$.

4. Теорема 1. *Пусть $u(x, y)$—какое-нибудь регулярное решение уравнения (E_0) в области (T), т. е. $u \in \mathfrak{L}$. Тогда для любой подобласти T' области T, с границей S', целиком лежащей внутри T, и для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой линейный агрегат*

$$A_0w_0+A_1w_1+\cdots+A_nw_n, \tag{1}$$

что

$$\left|u(x,\ y)-\sum_{k=1}^{n}A_kw_k(x,\ y)\right|<\varepsilon\qquad \text{в}\ T'+S', \tag{2}$$

т. е. любое регулярное решение уравнения (E_0) в области T можно равномерно апроксимировать внутри T линейными агрегатами вида (1).

Доказательство. Пусть $\{f(z),\ c_1,\ \ldots,\ c_m\}$—элемент множества $\mathfrak{M}$, соответствующий рассматриваемому элементу $u(x,\ y)$ множества $\mathfrak{L}$.

Рассмотрим какое-нибудь частное решение уравнения (E_0) вида

$$w(x,\ y)=\sum_{k=1}^{m}c_k\Omega(z,\ a_k)+L[P(z)],\quad P(z)\in\mathfrak{P},$$

которое, очевидно, имеет вид (1). Тогда, если будем предполагать, что $(x,\ y)\in T'+S'$, в силу теоремы А, получим

$$|u(x,\ y)-w(x,\ y)|\leqq|L[f(z)-P(z)]|\leqq\operatorname*{Max}_{T'+S'}|f(z)-P(z)|\cdot K,$$

где K—положительное число, не зависящее от выбора функций $f(z)$ и $P(z)$. Выбирая функцию $P(z)$, согласно теореме В, так, чтобы

$$\operatorname*{Max}_{z\in T'+S'}|f(z)-P(z)|<\frac{\varepsilon}{K},$$

получим неравенство (2), что и требовалось доказать.

5. Наложим теперь на уравнение (E_0) следующее ограничение: всякое регулярное решение этого уравнения в области T, которое всюду на S обращается в нуль, тождественно обращается в нуль во всей области T.

Кроме того, предположим, что координаты точек кривых S_j ($j=0, 1, \dots, m$) имеют производные первого порядка по дуге, которые удовлетворяют условию Hölder'a.

При этих условиях, краевая задача—найти регулярное решение уравнения (E_0) в области T, которое на S принимает наперед заданные значения функции $\psi(s)$ (s—длина дуги кривой S), удовлетворяющей условию Hölder'a,—всегда разрешима и притом имеет единственное решение, которое обладает тем свойством, что соответствующая голоморфная функция $f(\zeta)$ удовлетворяет на S условию Hölder'a [3].

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 2. *При сделанных в этом* n° *предположениях, всякое регулярное решение уравнения* (E_0) *в области* T, *предельные значения которого на* S *удовлетворяют условию* Hölder'a, *можно апроксимировать равномерно в* $T+S$ *линейными агрегатами вида* (1).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$—какое-нибудь решение уравнения (E_0), удовлетворяющее условию теоремы, а $\{f(\zeta), c_1, \dots, c_m\}$—соответствующий элемент множества $\mathfrak{M}$.

Как было уже выше отмечено, функция $f(\zeta)$ будет удовлетворять условию Hölder'a на S и, следовательно, в силу теоремы B, ее можно апроксимировать равномерно в $T+S$ рациональными функциями вида $P(\zeta;\ \infty, a_1, \dots, a_m)$. Тогда нетрудно видеть, что функции вида

$$w(x, y)=\sum_{k=1}^{m} c_k\Omega(\zeta, a_k)+L[P(\zeta)],$$

которые, очевидно, имеют вид (1), равномерно апроксимируют функцию $u(x, y)$ в $T+S$, что и требовалось доказать.

6. Путем ортогонализации функций $w_n(x, y)$ мы можем перейти к новой системе частных решений уравнения (E_0)

$$v_0(x, y),\quad v_1(x, y), \dots, v_n(x, y), \dots ,$$

удовлетворяющих условиям:

$$v_n(x, y)=B_0 w_0(x, y)+\cdots+B_n w_n(x, y),$$

$$\int_L v_j(s)\, v_k(s)\, ds=\begin{cases} 0, & j\neq k \\ 1, & k=j, \end{cases} \tag{3}$$

где $B_0, \dots, B_n$—вполне определенные вещественные постоянные.

Теорема 3. *Всякое решение уравнения* (E_0), *удовлетворяющее условиям теоремы* 2, *можно апроксимировать в среднем линейным агрегатом вида*

$$c_0 v_0(x, y)+c_1 v_1(x, y)+\cdots+c_n v_n(x, y),$$

где

$$c_k=\int_L u(s)\, v_k(s)\, ds \qquad (k=0,\ 1, \dots),$$

в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_S\left|u(s)-\sum_{k=0}^{n}c_k v_k(s)\right|^2 ds=0.$$

Доказательство. Согласно теореме 2, для любого $\varepsilon>0$ существует такой линейный агрегат

$$A_0 v_0(x, y)+\cdots+A_n v_n(x, y),$$

что

$$\left|u(s)-\sum_{k=0}^{n} A_k v_k(s)\right|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{l} \text{ на } S \ (l\text{—длина } S).$$

Но

$$\int_S\left|u(s)-\sum_{k=0}^{n}c_k v_k(s)\right|^2 ds \leqq \int_S\left|u(s)-\sum_{0}^{n} A_k v_k(s)\right|^2 ds<\varepsilon,$$

что и доказывает нашу теорему.

7. Если вместо условий (3) возьмем условия

$$\iint_T v_n v_k \, dx \, dy=\begin{cases} 0, & n\neq k \\ 1, & n=k, \end{cases}$$

то можем доказать теорему:

Теорема 4. *Всякое решение уравнения* (E_0), *удовлетворяющее условиям теоремы* 2, *можно апроксимировать в среднем в области* T *линейным агрегатом вида*

$$c_0 v_0(x, y)+\cdots+c_n v_n(x, y),$$

где

$$c_k=\iint_T u v_k dx\, dy.$$

Тбилисский Государственный Университет
имени Сталина

(Поступило в редакцию 21.1.1942)

მათემატიკა

ილია ვეკუა

ელიფსურ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების აპროქსიმაციის შესახებ

რეზუმე

შრომაში დამტკიცებულია რამოდენიმე ძირითადი დებულება ელიფსურ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების აპროქსიმაციის შესახებ, ამავე განტოლებათა გარკვეული კერძო ამოხსნების საშუალებით.

ანალოგიურ დებულებებს ამტკიცებს სხვა გზით სტ. ბერგმანი [1], რომელიც იძულებულია (მის მიერ გამოყენებული მეთოდის გამო) დაკმაყოფილდეს ძალიან ვიწრო კლასის არეების განხილვით; სახელდობრ, იგი იხილავს მხოლოდ მარტივადბმულ ამოზნექილ არეებს.

წინამდებარე შრომაში კი განხილულია ნებისმიერი სასრულო მრავალბმული არეები.

სტალინის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ციტირებული ლიტერატურა

1. St. Bergman. The approximation of functions statisfying a linear partial differential equation. Duke Mathematical Journal, Vol. 6, No 3, 1940, pp. 537—561.

2. Elias Vecoua. Allgemeine Darstellung der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen in einem mehrfach Zusammenhängenden Gebiet. Mitteilungen d. Georgischen Abteilung d. Akademie d. Wiss. d. USSR. Bd. I, Nr. 5, 1940, S. 329—335.

3. Илья Векуа. Граничные задачи теории линейных эллиптических диференциальных уравнений... Сообщения Груз. Фил. АН СССР, т. I, № 7, 1940, стр. 497—500.

4. J. L. Walsh. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. 1935, pp. 46—48.