ტფილისის გეოფიზიკური ინსტიტუტის შრომები, ტ. II. 1937
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. II. 1937

И. Н. ВЕКУА

К ВОПРОСУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный упругий слой конечной толщины h, ограниченный двумя параллельными плоскостями. Примем одну из граничных плоскостей за плоскость OXZ и направим ось OY вглубь среды. Предположим, что мы имеем дело с плоской задачей и вся картина колебания не зависит от координаты z. При этом, как известно, составляющие вектора смещения по осям координат будут иметь вид:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь φ и ψ — продольный и поперечный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}, \qquad b=\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad (b>a). \tag{3}$$

Через ρ мы обозначаем плотность среды, а λ и μ суть постоянные Lamé.

Рассмотрим два различных типа граничных условий. Случай 1°, когда на границах слоя отсутствуют напряжения, и случай 2°, когда на границах слоя равны нулю составляющие вектора смещения. Эти граничные условия запишутся так.

Случай 1°:

$$\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0,\,h}=0, \tag{4}$$

$$\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]_{y=0,\,h}=0. \tag{5}$$

Случай 2°:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=0,\,h}=0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{y=0,\,h}=0. \tag{7}$$

Можно было бы также рассмотреть третий случай, когда на одной границе отсутствуют напряжения и на другой—смещения. Но здесь мы ограничимся рассмотрением только вышеуказанных типов граничных условий.

Как видно, задача свелась к следующему: найти решение системы двух волновых уравнений (2), удовлетворяющих граничным условиям (4) и (5) или (6) и (7).

Метод, при помощи которого мы решаем вышепоставленную задачу, был развит В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым в мемуаре «Sur une methode nouvelle dans le probléme plan des vibrations élastiques»[1]. В этом мемуаре авторы дают полное решение задачи Лэмба (H. Lamb) для полупространства при помощи теории функции комплексного переменного. Главная идея этого метода заключается в том, что авторы, рассматривая в среде точечный источник, порождающий определенного вида продольные и поперечные волны и присоединяя к ним отраженные волны от границы полупространства, составляют общее решение задачи, удовлетворяющее начальным и граничным условиям. В случае слоя задача осложняется тем, что вместо конечного числа отраженных волн, а именно четырех, мы получим большое количество отраженных волн, число которых стремится к бесконечности с возрастанием времени t. Наша задача состоит в том, чтобы систематизировать эту бесконечную совокупность отраженных волн и для каждой отдельной отраженной волны указать формулу, позволяющую выражать ее через первоначально заданный падающий потенциал.

2. Напомним вкратце основные идеи метода.

Рассмотрим одно волновое уравнение:

$$c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\quad (c=a,\,b)\,. \tag{8}$$

Будем искать решение уравнения (8) в виде:

$$\varphi=f(\theta), \tag{9}$$

где f—произвольная аналитическая функция и θ—комплексная функция переменных x, y, t. С. Л. Соболевым доказана следующая теорема[2]. Для того, чтобы функция (9) служила бы решением уравнения (8), необходимо и достаточно, чтобы θ удовлетворяло уравнению:

$$\omega\equiv t-\chi_1(\theta)x-\chi_2(\theta)y+\chi(\theta)=0, \tag{10}$$

где $\chi_1(\theta)$ и $\chi_2(\theta)$ связаны между собой условием:

$$\chi_1^2(\theta)+\chi_2^2(\theta)=c^2,$$

в остальном $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ и $\chi(\theta)$ представляют произвольные аналитические функции переменного θ. Если $\chi_1(\theta)$ не обращается в постоянную, то, не уменьшая общности, можно считать $\chi_1(\theta)=\theta$. Тогда мы приходим к формуле:

$$\omega\equiv t-\theta x\pm\sqrt{c^2-\theta^2}\;y+\chi(\theta)=0. \tag{10 bis}$$

Убедиться в достаточности этой теоремы для рассматриваемого случая (10 bis) можно непосредственной подстановкой. В самом деле, обозначая через ω' частную производную $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$, мы из уравнения (10 bis) получим:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\theta}{\omega'},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\pm\sqrt{c^2-\theta^2}}{\omega'},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{-1}{\omega'}, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\theta^2}{\omega'}\right),\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{c^2-\theta^2}{\omega'}\right),\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mp\theta\sqrt{c^2-\theta^2}}{\omega'}\right),\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\omega'}\right)\end{gathered} \tag{12}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\,\frac{\theta^2}{\omega'}\right],\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\,\frac{c^2-\theta^2}{\omega'}\right],\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\,\frac{1}{\omega'}\right],\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\pm 1}{\omega'}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f'(\theta)\,\frac{\theta\sqrt{c^2-\theta^2}}{\omega'}\right].\end{gathered} \tag{13}$$

Из формул (13) сразу видно, что $f(\theta)$ действительно является решением уравнения (8). На доказательстве необходимости мы здесь не останавливаемся [2].

Заметим, что как вещественная, так и мнимая часть функции $f(\theta)$ являются также решениями уравнения (8).

Сумма частных решений вида (8) тоже является решением.

Обозначим через (S) полупространство переменных x, y, t $(t>0)$. Нетрудно видеть, что, вообще говоря, уравнение (10 bis) устанавливает соответствие между некоторыми лучами полупространства (S) и точками плоскости комплексного переменного θ. Следовательно θ сохраняет постоянное значение вдоль некоторых лучей в пространстве (S). Таким образом, потенциал (9) сохраняет постоянное значение вдоль некоторых лучей в пространстве (S).

3. Возьмем теперь продольный потенциал задачи упругости в формулах (1) в виде:

$$\varphi_1=R\Phi_1(\theta_1), \tag{14}$$

где θ_1 удовлетворяет уравнению

$$\omega_1 \equiv t-\theta_1 x+\varepsilon\sqrt{a^2-\theta_1^2}\, y+\chi_1(\theta_1)=0. \tag{15}$$

Здесь R—знак вещественной части, Φ_1—произвольная аналитическая функция комплексного переменного θ_1 и $\varepsilon=\pm 1$. При этом мы получим решение, представляющее собой распространяющуюся волну. Положим, что волна (14) в пути распространения встречает прямолинейную преграду $y=\lambda$ $(\lambda=0, h)$ параллельную оси OX. Отражаясь от этой преграды, волна φ_1 даст две отраженные волны: одну продольную φ_2 и другую поперечную ψ_2, которые будут иметь вид:

$$\varphi_2=R\Phi_2(\theta_2), \qquad \psi_2=R\Psi_2(\overline{\theta}_2),$$

где Φ_2 и Ψ_2—аналитические функции, которые могут быть выражены, как увидим ниже, через падающий потенциал при помощи граничных условий (4) и (5) или (6) и (7), а θ_2 и $\overline{\theta}_2$ должны удовлетворять уравнениям вида (10 bis) соответственно при $c=a$ и $c=b$. Воспользуемся произвольностью входящей в уравнение (10 bis) функции $\chi(\theta)$ для того, чтобы значения θ_1, θ_2 и $\overline{\theta}_2$ совпадали на прямой $y=\lambda$. Кроме того, выберем знаки у радикалов таким образом, чтобы после отражения получить волны, не меняющие всей картины движения до момента отражения [1]. Все эти условия будут выполнены, если положим:

$$\begin{aligned} &\omega_2 \equiv t-\theta_2 x-\varepsilon\sqrt{a^2-\theta_2^2}\, y+2\varepsilon\lambda\sqrt{a^2-\theta_2^2}+\chi_1(\theta_2)=0, \\ &\overline{\omega}_2 \equiv t-\overline{\theta}_2 x-\varepsilon\sqrt{b^2-\overline{\theta}_2^2}\, y+\varepsilon\lambda\sqrt{b^2-\overline{\theta}_2^2}+\varepsilon\lambda\sqrt{a^2-\overline{\theta}_2^2}+\chi_1(\overline{\theta}_2)=0. \end{aligned} \tag{16}$$

В самом деле, из (15) и (16) вытекает, что при $y=\lambda$

$$\theta_1=\theta_2=\overline{\theta}_2=\theta.$$

Отраженные потенциалы зависят, очевидно, от двух факторов: во-первых, от вида падающего потенциала и, во-вторых, от того режима, который существует на границе отражения, т. е. от граничных условий.

Положим, что на прямой $y=\lambda$ мы имеем или случай 1° или случай 2° граничных условий.

Удовлетворяя соответствующим граничным условиям (4) и (5) или (6) и (7) потенциалами вида:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=R[\Phi_1(\theta_1)+\Phi_2(\theta_2)], \qquad \psi=\psi_2=R[\Psi_2(\overline{\theta}_2)],$$

получим [1]:

$$\Phi_2'(\theta)=A(\theta)\Phi_1'(\theta), \quad \Psi_2'(\theta)=\varepsilon B(\theta)\Phi_1'(\theta). \tag{17}$$

где в случае 1°:

$$A=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}},$$

$$B=\frac{-4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}},\qquad(18)$$

а в случае 2°:

$$A=\frac{-\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}{\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}},$$

$$B=\frac{-2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}}{\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}.\qquad(19)$$

Рассмотрим теперь падающий поперечный потенциал:

$$\psi_1=R\Psi_1(\bar\theta_1),$$

где Ψ_1—произвольная аналитическая функция и $\bar\theta_1$ удовлетворяет уравнению:

$$\bar\omega_1\equiv t-\bar\theta_1 x+\varepsilon\sqrt{b^2-\bar\theta_1^2}\,y+\chi_2(\bar\theta_1)=0,$$

где $\chi_2(\bar\theta_1)$ — аналитическая функция от $\bar\theta_1$.

Обозначая отраженные продольный и поперечный потенциалы через φ_3 и ψ_3, будем иметь:

$$\varphi_3=R\Phi_3(\theta_3),\qquad \psi_3=R\Psi_3(\bar\theta_3),$$

где θ_3 и $\bar\theta_3$ удовлетворяют уравнениям типа (10 bis) соответственно при $c=a$ и $c=b$. Но эти уравнения должны быть так подобраны, чтобы значения $\bar\theta_1$, θ_3 и $\bar\theta_3$ совпадали на прямой $y=\lambda$. Аналогично прежнему получим:

$$\omega_3\equiv t-\theta_3 x-\varepsilon\sqrt{a^2-\theta_3^2}\,y+\varepsilon\lambda\sqrt{a^2-\theta_3^2}+\varepsilon\lambda\sqrt{b^2-\theta_3^2}+\chi_2(\theta_3)=0,$$

$$\bar\omega_3\equiv t-\bar\theta_3 x-\varepsilon\sqrt{b^2-\bar\theta_3^2}\,y+2\varepsilon\lambda\sqrt{b^2-\bar\theta_3^2}+\chi_2(\bar\theta_3)=0.$$

Удовлетворяя на прямой $y=\lambda$ граничным условиям (4) и (5) или (6) и (7) функциями:

$$\varphi=\varphi_3=R\Phi_3(\theta_3),\qquad \psi=\Psi_1+\Psi_3=R[\Psi_1(\bar\theta_1)+\Psi_3(\bar\theta_3)],$$

получим:

$$\Phi_3'(\theta)=\varepsilon C(\theta)\Psi_1'(\theta),\qquad \Psi_3'(\theta)=A(\theta)\Psi_1'(\theta),\qquad(20)$$

где в случае 1°:

$$C=\frac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}},\qquad(21)$$

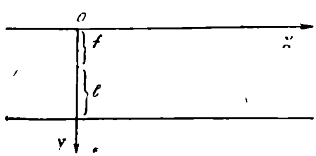
а в случае 2°:

$$C=\frac{2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}}{\theta^2+\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}. \tag{22}$$

Формулы (17) и (20) дают нам возможность вычислить производные отраженных комплексных потенциалов через значения производной падающего потенциала. Значение самих потенциалов мы можем получить путем интегрирования. Так как нам в дальнейшем понадобятся только производные от потенциалов, а не сами потенциалы, то вычисление последних мы производить не будем.

Формулы (17) и (20) дают правило построения отраженных волн от прямолинейной границы при рассматриваемых граничных условиях, если падающая волна принадлежит к типу (9).

4. Положим, что на оси OY внутри слоя в точке с координатами $x=0$, $y=f$ помещается точечный источник колебания, который порождает волны вида (9), т. е. продольные и поперечные волны, причем потенциалы сохраняют постоянные значения вдоль некоторых лучей в пространстве (S). Пусть Π_0 и Π_1 обозначают соответственно полуплоскости $y=0$ и $y=h$ в пространстве (S), где h — толщина слоя. Пусть далее l — расстояние источника до плоскости Π_1, т. е. до границы $y=h$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Рассмотрим падающую продольную волну, определенную формулой:

$$\varphi_0=R\Phi(\theta_0), \tag{23}$$

где θ_0 удовлетворяет уравнению:

$$\omega_0\equiv t-\theta_0 x+\sqrt{a^2-\theta_0^2}\,y-\sqrt{a^2-\theta_0^2}\,f=0, \tag{24}$$

радикал $\sqrt{a^2-\theta_0^2}$ считается отрицательно мнимым для $\theta_0>a$ и Φ_0 — произвольная аналитическая функция.

Допустим, что слой начинает колебаться в момент $t=0$. В некоторый момент времени $t>0$ колебание успеет распространиться только до окружности:

$$x^2+(y-f)^2=\frac{1}{a^2}t^2.$$

Очевидно, картина движения слоя будет характеризоваться формулой (23), пока $t<a\{f,l\}$, где через символ $\{f,l\}$ обозначаем число, наименьшее из чисел f и l.

Разрешая уравнение (24) относительно θ_0 и выбирая соответственно знак у радикала, получим:

$$\theta_0 = \frac{xt}{x^2+(y-f)^2} - i\,\frac{(y-f)\sqrt{t^2-a^2[x^2+(y-f)^2]}}{x^2+(y-f)^2}. \qquad (25)$$

Обозначим через T_0 конус с вершиной в точке $x=0$, $y=f$, $t=0$ в пространстве (S), уравнение которого есть:

$$t^2-a^2[x^2+(y-f)^2]=0.$$

Очевидно, что уравнение (25) устанавливает соответствие между точками всей плоскости комплексного переменного θ_0, за исключением купюры $(-a, a)$ на вещественной оси и лучами, заполняющими конус T_0 и проходящими через вершину. Лучам, пересекающим плоскость Π_0, соответствует верхняя полуплоскость, а лучам, пересекающим плоскость Π_1,—нижняя полуплоскость комплексного переменного θ_0. Лучам, расположенным в плоскости $y=f$, соответствует вещественная ось, за исключением купюры $(-a, a)$; при этом лучам, для которых $x<0$ при $t>0$ соответствует промежуток $(-\infty, -a)$, а лучам, для которых $x>0$ при $t>0$—промежуток $(a, +\infty)$. Лучам, расположенным на плоскости $x=0$, соответсвует вся мнимая ось; причем лучам, пересекающим плоскость Π_0, соответствует промежуток $(0, i\infty)$, а лучам, пересекающим плоскость Π_1,—промежуток $(0, -i\infty)$. Лучу $x=0, y=f$, т. е. оси конуса T_0 будет соответствовать бесконечно удаленная точка на плоскости θ_0. Образующим конуса T_0 соответствуют точки купюры $(-a, +a)$; причем мы должны рассматривать два берега этой купюры. Верхнему берегу соответствуют образующие, пересекающие плоскость Π_0, а нижнему берегу образующие, пересекающие плоскось Π_1.

При $-a \leqq \theta_0 \leqq a$ уравнение (24) представляет уравнение семейства плоскостей, зависящих от одного параметра. Огибающая этого семейства и есть конус T_0. Каждой плоскости этого семейства соответствует одна образующая конуса T_0, вдоль которой эта плоскость касается конусу. Таким образом, из уравнения (24) вытекает, что θ_0 сохраняет постоянное значение на всей касательной плоскости конуса T_0.

Заметим здесь, что уравнение конуса T_0 получается исключением параметра θ_0 из двух уравнений:

$$\omega_0=0, \qquad \omega'=0.$$

Следовательно, на конусе T_0 обращаются в бесконечность производные от θ_0 по x, y и t в силу формул (11).

Если мы будем рассматривать такое колебание, которое сосредоточено внутри конуса T_0 и вне его господствует покой, то мы должны иметь:

$$\varphi_0 = R\Phi_0(\theta_0)=0, \quad \text{при } -a \leqq \theta_0 \leqq a.$$

Следовательно, функция Φ_0 должна быть выбрана так, чтобы при $-a \leqq \theta_0 \leqq a$ она стала чисто мнимой.

В момент $t > af$ (пусть $f < l$) падающему потенциалу φ_0 добавляются отраженные от прямой $y=0$ потенциалы: продольный φ_{00} и поперечный ψ_{00}.

Согласно правилам предыдущего параграфа мы имеем:

$$\varphi_{00} = R\Phi_{00}(\theta_{00}), \quad \psi_{00} = R\Psi_{00}(\overline{\theta}_{00}),$$

где θ_{00} и $\overline{\theta}_{00}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega_{00} &\equiv t - \theta_{00}x - \sqrt{a^2-\theta_{00}^2}\, y - f\sqrt{a^2-\theta_{00}^2} = 0, \\ \overline{\omega}_{00} &\equiv t - \overline{\theta}_{00}x - \sqrt{b^2-\overline{\theta}_{00}^2}\, y - f\sqrt{a^2-\overline{\theta}_{00}^2} = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

а Φ'_{00} и Ψ'_{00} вычисляются по формулам:

$$\Phi'_{00} = A\Phi'_0, \quad \Psi'_{00} = B\Phi'_0. \tag{27}$$

Величины A и B вычисляются по формулам (18) в случае 1° и по формулам (19) в случае 2°.

Так же точно при $t > al$ к этим потенциалам добавляются еще потенциалы, отраженные от границы $y=h$, но, прежде чем рассмотреть эти потенциалы, лучше проследить за дальнейшими отражениями потенциалов φ_{00} и ψ_{00}.

Переходя к решению поставленной задачи, прежде всего, условимся в некоторых обозначениях. В дальнейшем мы все время через Φ и Ψ с соответствующими значками будем обозначать продольные и поперечные комплексные потенциалы, а через φ и ψ их вещественные части, т. е. вещественные продольные и поперечные потенциалы. θ и $\overline{\theta}$ с соответствующими значками будут обозначать аргументы функции Φ и Ψ.

Потенциалы φ_{00} и ψ_{00}, отражаясь от границы $y=h$, дадут четыре отраженных потенциала:

$$\varphi_{00} \begin{cases} \varphi_{10} = R\Phi_{10}(\theta_{10}) \\ \psi_{10} = R\Psi_{10}(\overline{\theta}_{10}), \end{cases} \qquad \psi_{00} \begin{cases} \varphi_{01} = R\Phi_{01}(\theta_{01}) \\ \psi_{01} = R\Psi_{01}(\overline{\theta}_{01}), \end{cases}$$

где аргументы θ_{10}, $\overline{\theta}_{10}$, θ_{01} и $\overline{\theta}_{01}$, в силу правил предыдущего параграфа, должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega_{10} &\equiv t - \theta_{10}x + \sqrt{a^2-\theta_{10}^2}\, y - (2h+f)\sqrt{a^2-\theta_{10}^2} = 0, \\ \overline{\omega}_{10} &\equiv t - \overline{\theta}_{10}x + \sqrt{b^2-\overline{\theta}_{10}^2}\, y - h\sqrt{b^2-\overline{\theta}_{10}^2} - (h+f)\sqrt{a^2-\overline{\theta}_{10}^2} = 0, \\ \omega_{01} &\equiv t - \theta_{01}x + \sqrt{a^2-\theta_{01}^2}\, y - h\sqrt{b^2-\theta_{01}^2} - (h+f)\sqrt{a^2-\theta_{01}^2} = 0, \\ \overline{\omega}_{01} &\equiv t - \overline{\theta}_{01}x + \sqrt{b^2-\overline{\theta}_{01}^2}\, y - 2h\sqrt{b^2-\overline{\theta}_{01}^2} - f\sqrt{a^2-\overline{\theta}_{01}^2} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

На основании формул (17), (20) и (27), имеем:

$$\Phi'_{10}=A^2\Phi'_0, \qquad \Psi''_{10}=-AB\Phi'_0,$$
$$\Phi'_{01}=-BC\Phi'_0, \qquad \Psi''_{01}=AB\Phi'_0. \tag{29}$$

Полученные потенциалы φ_{10}, ψ_{10}, φ_{01} и ψ_{01}, падая в свою очередь на границу $y=0$, отражаются от нее и дают потенциалы:

$$\varphi_{10}\begin{cases}\varphi_{20}=R\Phi_{20}(\theta_{20})\\ \psi_{20}=R\Psi_{20}(\bar\theta_{20}),\end{cases} \qquad \psi_{10}\begin{cases}\varphi_{t11}=R\Phi_{t11}(\theta_{t11})\\ \psi_{t11}=R\Psi_{t11}(\bar\theta_{t11}),\end{cases}$$

$$\varphi_{01}\begin{cases}\varphi_{l11}=R\Phi_{l11}(\theta_{l11})\\ \psi_{l11}=R\Psi_{l11}(\bar\theta_{l11}),\end{cases} \qquad \psi_{01}\begin{cases}\varphi_{02}=R\Phi_{02}(\theta_{02})\\ \psi_{02}=R\Psi_{02}(\bar\theta_{02}),\end{cases}$$

где аргументы θ и $\bar\theta$ со значками удовлетворяют уравнениям, аналогичным (10 bis), соответственно при $c=a$ и $c=b$; при этом легко убедиться, что

$$\theta_{l11}=\theta_{t11}=\theta_{11}, \qquad \bar\theta_{l11}=\bar\theta_{t11}=\bar\theta_{11}. \tag{30}$$

Нижний значек l при Φ и Ψ указывает на то, что данный потенциал получился в результате отражения продольного потенциала, а значек t обозначает, что предыдущий потенциал был поперечный. Первый нижний числовой значек показывает, сколько раз данный потенциал шел как отраженный продольный потенциал, а второй значек показывает, сколько раз данный потенциал шел как отраженный поперечный. Там, где один или оба из числовых значков равны нулю, буквенные значки l и t можно опустить.

В силу (30) вместо восьми комплексных потенциалов мы можем рассмотреть только следующие шесть:

$$\Phi_{20},\ \Phi_{11}=\Phi_{l11}+\Phi_{t11},\ \Phi_{02},\ \Psi_{20},\ \Psi_{11}=\Psi_{l11}+\Psi_{t11},\ \Psi_{02}.$$

При помощи формул (17), (20) и (29) мы напишем:

$$\Phi'_{20}=A^3\Phi'_0, \quad \Phi'_{11}=-2ABC\Phi'_0, \quad \Phi'_{02}=ABC\Phi'_0,$$
$$\Psi'_{20}=A^2B\Phi'_0, \quad \Psi_{11}=-[A^2B+B^2C]\,\Phi'_0, \quad \Psi'_{02}=A^2B\Phi'_0. \tag{31}$$

Отражая в свою очередь полученные потенциалы $\varphi_{m,n}$ и $\psi_{m,n}$ $(m+n=2;\ m,n=0,1,2)$ от границы $y=h$, мы получим восемь потенциалов $\varphi_{m,n}$ и $\psi_{m,n}$ $(m+n=3;\ m,n=0,1,2,3)$.

Продолжая этот процесс отражения безгранично, мы будем иметь потенциалы вида $\varphi_{p-k,k}$ и $\psi_{p-k,k}$; где p—какое-нибудь целое положительное число или нуль, а k принимает значения $k=0,1,2,\ldots,p$. Число потенциалов вида $\varphi_{p-k,k}$ и $\psi_{p-k,k}$ будет, очевидно, $2p+2$.

Аналогично предыдущему, будем иметь:

$$\varphi_{p-k,k}=R\Phi_{p-k,k}(\theta_{p-k,k}), \qquad \Psi_{p-k,k}=R\Psi_{p-k,k}(\bar\theta_{p-k,k}), \tag{32}$$
$$(p=0,1,2,\ldots;\ k=0,1,2,3,\ldots,p).$$

Если условиться считать, что

$$\Phi_{l\,0,\,p}=\Psi_{l\,0,\,p}=\Phi_{t\,p,\,0}=\Psi_{t\,p,\,0}=0, \tag{33}$$

тогда имеем:

$$\begin{aligned}\Phi_{p-k,\,k}&=\Phi_{l\,p-k,\,k}+\Phi_{t\,p-k,\,k},\\ \Psi_{p-k,\,k}&=\Psi_{l\,p-k,\,k}+\Psi_{t\,p-k,\,k}.\end{aligned} \tag{34}$$

Отсюда вытекают, в силу формул (17) и (20), следующие важные рекурентные формулы:

$$\begin{aligned}\Phi'_{p-k,\,k}&=A\Phi'_{p-k-1,\,k}+(-1)^p C\Psi'_{p-k,\,k-1},\\ \Psi'_{p-k,\,k}&=(-1)^p B\Phi'_{p-k-1,\,k}+A\Psi'_{p-k,k-1}.\end{aligned} \tag{35}$$

Аргументы $\theta_{p-k,\,k}$ и $\overline{\theta}_{p-k,\,k}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

1) когда p—целое четное положительное число или нуль

$$\begin{aligned}\omega_{p-k,\,k}&\equiv t-\theta_{p-k,\,k}\,x-\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}\;y-kh\sqrt{b^2-\theta^2_{p-k,\,k}}\\ &\quad-[(p-k)h+f]\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}=0,\\ \overline{\omega}_{p-k,\,k}&\equiv t-\overline{\theta}_{p-k,\,k}\,x-\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}\;y-kh\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}\\ &\quad-[(p-k)h+f]\sqrt{a^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}=0.\end{aligned} \tag{36}$$

2) когда p—целое нечетное положительное число

$$\begin{aligned}\omega_{p-k,\,k}&\equiv t-\theta_{p-k,\,k}\,x+\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}\;y-kh\sqrt{b^2-\theta^2_{p-k,\,k}}\\ &\quad-[(p-k+1)h+f]\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}=0,\\ \overline{\omega}_{p-k,\,k}&\equiv t-\overline{\theta}_{p-k,\,k}\,x+\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}\;y-(k+1)h\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}\\ &\quad-[(p-k)h+f]\sqrt{a^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}=0,\\ &(p=0,1,2,\ldots;\quad k=0,1,2,\ldots,p).\end{aligned} \tag{37}$$

Правильность формул (36) и (37) можно проверить непосредственно для $p=0,1,2$, сравнивая их с формулами (26) и (28). А в правильности их при произвольном p можно убедиться методом полной индукции, т. е. путем перехода от n к $n+1$.

Докажем теперь справедливость следующих формул:

$$\Phi'_{p-k,\,k}(\theta)=(-1)^k A(\theta)\Phi'(\theta)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{p-k+1}{s}\cdot\binom{p-s}{p-k}\overset{p-2s}{A}(\theta) \tag{38}$$

и

$$\Psi'_{p-k,\,k}(\theta)=(-1)^{p-k}B(\theta)\Phi'_0(\theta)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{p-k}{s}\cdot\binom{p-s}{p-k}\overset{p-2s}{A}(\theta) \tag{39}$$

где

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu+1)}$$

Очевидно, что бесконечные суммы, стоящие в правых частях (33) и (39), при всяком конечном p обрываются и представляют полиномы степени p от A.

Правильность формул (38) и (39) можно установить по методу полной индукции. В самом деле, принимая во внимание, что

$$BC = A^2 - 1, \tag{40}$$

непосредственным сравнением формул (38) и (39) с формулами (27), (29) и (31) убеждаемся в правильности их при $p=0, 1, 2$. Предположим теперь, что они имеют место при некотором целом положительном p и покажем, что они будут иметь место также и для $p+1$. Для этого рассмотрим волны $\varphi_{p-k+1,\,k-1}$ и $\psi_{p-k+1,\,k-1}$ и построим отраженные волны $\varphi_{p-k+1,\,k}$ и $\psi_{p-k+1,\,k}$. Мы имеем:

$$\varphi_{p-k+1,\,k} = R\Phi_{p-k+1,\,k}(\theta_{p-k+1,\,k}), \quad \psi_{p-k+1,\,k} = R\Psi_{p-k+1,\,k}(\overline{\theta}_{p-k+1,\,k}),$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots p+1).$$

На основании (35), (38) и (40) мы находим, что выражение:

$$\Phi'_{p-k+1,\,k} = (-1)^k A^2 \Phi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-k+1}{s} \binom{p-s}{p-k} A^{p-2s}$$

$$+(-1)^k (A^2-1)\Phi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-k+1}{s} \binom{p-s}{p-k+1} A^{p-2s}$$

$$=(-1)^k \Phi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-k+1}{s} \binom{p-s+1}{p-k+1} A^{p-2s+2}$$

$$-(-1)^k \Phi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-k+1}{s} \binom{p-s}{p-k+1} A^{p-2s}$$

$$=(-1)^k A \Phi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-k+2}{s} \binom{p-s+1}{p-k+1} A^{p-2s+1},$$

совпадает с формулой (38). Но правильность (38) при $p=0, 1, 2$ нами уже доказана. Следовательно, она имеет место при всяком p, что и требовалось доказать.

Аналогичным способом можно также доказать справедливость формулы (39).

Формулы (38) и (39) представляют главный результат нашего исследования.

Построим теперь волны, получающиеся отражением падающего продольного потенциала φ_0 от границы $y=h$. Обозначим их через φ^*_{00} и ψ^*_{00}. Тогда будем иметь:

$$\varphi^*_{00}=R\Phi^*_{00}(\theta^*_{00}),\qquad \psi^*_{00}=R\Psi^*_{00}(\overline{\theta}^*_{00}),$$

где θ^*_{00} и $\overline{\theta}^*_{00}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\omega^*_{00}\equiv t-\theta^*_{00}x-\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{00}}\,y+(2h-f)\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{00}}=0,$$

$$\overline{\omega}^*_{00}\equiv t-\overline{\theta}^*_{00}x-\sqrt{b^2-\overline{\theta}^{*2}_{00}}\,y+h\sqrt{b^2-\overline{\theta}^{*2}_{00}}+(h-f)\sqrt{a^2-\overline{\theta}^{*2}_{00}}=0,$$

а Φ^*_{00} и Ψ^*_{00}—аналитические функции, которые вычисляются по формулам:

$$\Phi^{*\prime}_{00}=A\Phi'_0,\quad \Psi^{*\prime}_{00}=B\Phi'_0,$$

где $\Phi^{*\prime}_{00}$ и $\Psi^{*\prime}_{00}$ обозначают производные от Φ^*_{00} и Ψ^*_{00}. Таким образом, мы видим, что

$$\Phi^{*\prime}_{00}=\Phi'_{00}\ \text{и}\ \Psi^{*\prime}_{00}=\Psi'_{00}.$$

После p краткого отражения мы получим волны вида $\varphi^*_{p-k,k}$ и $\psi^*_{p-k,k}$ $(k=0,1,2,\dots,p)$, где:

$$\varphi^*_{p-k,k}=R\Phi^*_{p-k,k}(\theta^*_{p-k,k}),\qquad \psi^*_{p-k,k}=R\Psi^*_{p-k,k}(\overline{\theta}^*_{p-k,k}),$$

$$(k=0,1,2,\dots,p).$$

Легко видеть, что функции $\Phi^*_{p-k,k}$ и $\Psi^*_{p-k,k}$ совпадают соответственно с функциями $\Phi_{p-k,k}$ и $\Psi_{p-k,k}$.

Аргументы $\theta^*_{p-k,k}$ и $\overline{\theta}^*_{p-k,k}$ удовлетворяют уравнениям:

1) при четном неотрицательном целом p:

$$\begin{aligned}\omega^*_{p-k,k}\equiv t-\theta^*_{p-k,k}x-\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{p-k,k}}\,y+kh\sqrt{b^2-\theta^{*2}_{p-k,k}}\\+[(p-k+1)h-f]\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{p-k,k}}=0,\\ \overline{\omega}^*_{p-k,k}\equiv t-\overline{\theta}^*_{p-k,k}x-\sqrt{b^2-\overline{\theta}^{*2}_{p-k,k}}\,y+(k+1)h\sqrt{b^2-\overline{\theta}^{*2}_{p-k,k}}\\+[(p-k)h-f]\sqrt{a^2-\overline{\theta}^{*2}_{p-k,k}}=0,\end{aligned}\qquad (41)$$

$$(k=0,1,2,\dots,p);$$

2) при нечетном положительном целом p:

$$\begin{aligned} \omega^*_{p-k,k} &\equiv t-\theta^*_{p-k,k}x+\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{p-k,k}}\,y+kh\sqrt{b^2-\theta^{*2}_{p-k,k}} \\ &+[(p-k)h-f]\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{p-k,k}}=0, \\ \bar{\omega}^*_{p-k,k} &\equiv t-\bar{\theta}^*_{p-k,k}x+\sqrt{b^2-\bar{\theta}^{*2}_{p-k,k}}\,y+kh\sqrt{b^2-\bar{\theta}^{*2}_{p-k,k}} \\ &+[(p-k)h-f]\sqrt{a^2-\bar{\theta}^{*2}_{p-k,k}}=0, \\ &(k=0,1,2,\ldots,p). \end{aligned} \tag{42}$$

5. Аналогичным способом, как в предыдущем параграфе, мы построим теперь отраженные потенциалы, когда первоначальная падающая волна является поперечной.

Пусть имеем падающую поперечную волну:

$$\psi_0=R\Psi_0(\bar{\vartheta}_0), \tag{42'}$$

где $\bar{\vartheta}_0$ есть решение уравнения:

$$\bar{\omega}_0\equiv t-\bar{\vartheta}_0x+\sqrt{b^2-\bar{\vartheta}_0^2}\;y-\sqrt{b^2-\bar{\vartheta}_0^2}\;f=0. \tag{43}$$

Обозначим через $\bar{\varphi}_{p-k,k}$ и $\bar{\psi}_{p-k,k}$ $(p=0,1,2,\ldots;\quad k=0,1,2,\ldots,p)$ потенциалы, полученные путем многократного отражения тех лучей, которые соответствуют верхней полуплоскости переменного ϑ_0. Тогда будем иметь:

$$\bar{\varphi}_{p-k,k}=R\bar{\Phi}_{p-k,k}(\vartheta_{p-k,k}),\quad \bar{\psi}_{p-k,k}=R\bar{\Psi}_{p-k,k}(\bar{\vartheta}_{p-k,k}),$$

где $\vartheta_{p-k,k}$ и $\bar{\vartheta}_{p-k,k}$ удовлетворяют уравнениям:

1) при четном неотрицательном целом p:

$$\begin{aligned} \delta_{p-k,k} &\equiv t-\vartheta_{p-k,k}\,x-\sqrt{a^2-\vartheta^2_{p-k,k}}\;y-(kh+f)\sqrt{b^2-\vartheta^2_{p-k,k}} \\ &-(p-k)h\sqrt{a^2-\vartheta^2_{p-k,k}}=0, \\ \bar{\delta}_{p-k,k} &\equiv t-\bar{\vartheta}_{p-k,k}\,x-\sqrt{b^2-\bar{\vartheta}^2_{p-k,k}}\;y-(kh+f)\sqrt{b^2-\bar{\vartheta}^2_{p-k,k}} \\ &-(p-k)h\sqrt{a^2-\bar{\vartheta}^2_{p-k,k}}=0, \\ &(k=0,1,2,\ldots,p); \end{aligned} \tag{44}$$

2) при нечетном положительном целом p:

$$\delta_{p-k,\,k} \equiv t - \vartheta_{p-k,\,k} + \sqrt{a^2 - \vartheta^2_{p-k,\,k}}\, y - (kh+f)\sqrt{b^2 - \vartheta^2_{p-k,\,k}}$$

$$- (p-k+1)h\sqrt{a^2 - \vartheta^2_{p-k,\,k}} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{p-k,\,k} \equiv t - \bar{\vartheta}_{p-k,\,k} x - \sqrt{b^2 - \bar{\vartheta}^2_{p-k,\,k}}\, y - [(k+1)h+f]\sqrt{b^2 - \bar{\vartheta}^2_{p-k,\,k}} \tag{45}$$

$$- (p-k)h\sqrt{a^2 - \bar{\vartheta}^2_{p-k,\,k}} = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Можно указать простое правило, при помощи которого очень легко получить уравнения (44) и (45). Именно, чтобы получить, например, уравнение $\delta_{p-k,\,k} = 0$, для определения переменного $\vartheta_{p-k,\,k}$, нужно взять уравнение $\bar{\omega}_{k,\,p-k} = 0$, определяющее $\bar{\theta}_{k,\,p-k}$, и в нем переставить местами буквы a и b. Такой же перестановкой в уравнении $\omega_{k,\,p-k} = 0$ мы получим уравнение $\bar{\delta}_{p-k,\,k} = 0$.

В правильности этих формул можно убедиться также методом полной индукции.

Для вычисления производных от функции $\bar{\Phi}_{p-k,\,k}$ и $\bar{\Psi}_{p-k,\,k}$ мы будем иметь формулы:

$$\bar{\Phi}'_{p-k,\,k} = (-1)^k C \Psi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{p-s}{k} A^{p-2s} \tag{46}$$

и

$$\bar{\Psi}'_{p-k,\,k} = (-1)^{p-k} A \Psi'_0 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{k+1}{s} \binom{p-s}{k} A^{p-2s}. \tag{47}$$

Для получения этих формул, удобно пользоваться следующим правилом: чтобы получить формулу для $\bar{\Phi}'_{p-k,\,k}$, нужно в формуле для $\Psi'_{k,\,p-k}$, B заменить через C, а Φ_0 через Ψ_0. Чтобы получить формулу для $\bar{\Psi}'_{p-k,\,k}$, нужно в формуле для $\Phi'_{k,\,p-k}$ заменить Φ'_0 через Ψ'_0.

Верность формул (46) и (47) можно доказать непосредственно так же, как мы это делаем для доказательства формул (38) и (39).

Рассмотрим теперь те потенциалы, которые возникают отражением потенциала ψ_0 от границы $y=h$. Обозначая их аналогично предыдущему через $\bar{\varphi}^*_{p-k,\,k}$ и $\bar{\psi}^*_{p-k,\,k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, p,\quad p=0, 1, 2, \ldots)$, будем иметь:

$$\bar{\varphi}^*_{p-k,\,k} = R\bar{\Phi}^*_{p-k,\,k}(\vartheta^*_{p-k,\,k}), \quad \bar{\psi}^*_{p-k,\,k} = R\bar{\Psi}^*_{p-k,\,k}(\bar{\vartheta}^*_{p-k,\,k}),$$

где $\vartheta^*_{p-k,\,k}$ и $\bar{\vartheta}^*_{p-k,\,k}$ удовлетворяют уравнениям:

1) при четном неотрицательном целом p:

$$\begin{aligned}\delta^*_{p-k,\,k} &\equiv t-\vartheta^*_{p-k,\,k}\,x-\sqrt{a^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}\,y+(kh+l)\sqrt{b^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}\\ &\quad+(p-k+1)h\sqrt{a^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}=0,\\ \overline{\delta}^*_{p-k,\,k} &\equiv t-\overline{\vartheta}^*_{p-k,\,k}\,x-\sqrt{b^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}\,y+[(k+1)h+l]\sqrt{b^2-\overline{\vartheta}^{*2}_{p-k,\,k}}\\ &\quad+(p-k)h\sqrt{a^2-\overline{\vartheta}^{*2}_{p-k,\,k}}=0,\\ &\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,p);\end{aligned}\tag{48}$$

2) при нечетном положительном целом p:

$$\begin{aligned}\delta^*_{p-k,\,k} &\equiv t-\vartheta^*_{p-k,\,k}\,x+\sqrt{a^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}\,y+(kh+l)\sqrt{b^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}\\ &\quad+(p-k)h\sqrt{a^2-\vartheta^{*2}_{p-k,\,k}}=0,\\ \overline{\delta}^*_{p-k,\,k} &\equiv t-\overline{\vartheta}^*_{p-k,\,k}\,x+\sqrt{b^2-\overline{\vartheta}^{*2}_{p-k,\,k}}\,y+(kh+l)\sqrt{b^2-\overline{\vartheta}^{*2}_{p-k,\,k}}\\ &\quad+(p-k)h\sqrt{a^2-\overline{\vartheta}^{*2}_{p-k,\,k}}=0,\\ &\qquad (k=0,\ 2,\ldots,p).\end{aligned}\tag{49}$$

Функции $\overline{\Phi}^*_{p-k,\,k}$ и $\overline{\Psi}^*_{p-k,\,k}$ совпадают с функциями $\overline{\Phi}_{p-k,\,k}$ и $\overline{\Psi}_{p-k,\,k}$.

6. Отметим здесь некоторые следствия, вытекающие из полученных нами выше формул.

Обозначим через (E) часть пространства (S), заключенную между плоскостями Π_0 и Π_1. Уравнения (36), (37), (41) и (42) устанавливают соответствия, как это было нами уже замечено в § 2, между точками плоскости комплексного переменного с купюрой $(-a,\ +a)$ на вещественной оси и некоторыми лучами пространства (S), идущими в сторону возрастающих t, вдоль которых сохраняют постоянное значение соответствующие отраженные потенциалы. Из совокупности всех этих лучей для нас интересны только те, которые пересекают полуплоскости Π_0 и Π_1 на конечных точках или на бесконечности. Эти лучи мы назовем отраженными. Точкам купюры $(-a,\ a)$ на вещественной оси соответствуют семейства плоскостей, зависящие от одного параметра, уравнения которых будут (36), (37), (41) и (42), т. е. при фиксированном p и k их будет 4:

$$\omega_{p-k,\,k}=0,\qquad \overline{\omega}_{p-k,\,k}=0,\qquad \omega^*_{p-k,\,k}=0,\qquad \overline{\omega}^*_{p-k,\,k}=0.\tag{50}$$

Огибающие этих семейств плоскостей мы обозначим соответственно через $T_{p-k,\,k}$, $\overline{T}_{p-k,\,k}$, $T^*_{p-k,\,k}$ и $\overline{T}^*_{p-k,\,k}$. На этих поверхностях, наряду с равенствами (50), мы получим ряд новых, так как на них обращаются в ноль также производные по параметру от левых частей уравнений (50).

Мы получим:

$$\omega'_{p-k,\,k}=0,\quad \overline{\omega}'_{p-k,\,k}=0,\quad \omega^{*\prime}_{p-k,\,k}=0,\quad \overline{\omega}^{*\prime}_{p-k,\,k}=0 \tag{50'}$$

соответственно на $T_{p-k,\,k}$, $\overline{T}_{p-k,\,k}$, $T^*_{p-k,\,k}$ и $\overline{T}^*_{p-k,\,k}$.

Следовательно, на этих поверхностях, в силу формул (11) и (50'), обращаются в бесконечность производные от:

$$\theta_{p-k,\,k},\quad \overline{\theta}_{p-k,\,k},\quad \theta^*_{p-k,\,k} \text{ и } \overline{\theta}^*_{p-k,\,k} \text{ по } x \text{ и } y;$$

причем порядок обращения в бесконечность будет такой же, как в выражениях (см. I, стр. 25):

$$\frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{y-y_0}}$$

при $x\to x_0$ и $y\to y_0$.

Составим теперь выражения для составляющих вектора смещения. Предположим сначала, простоты ради, что имеем только падающий продольный потенциал. Тогда, в силу формул (1), (11), (36) и (37), напишем:

$$\begin{aligned} u=R\Bigg\{ \Phi_0(\theta_0)\frac{\theta_0}{\omega'_0}+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\Bigg[\Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\theta_{p-k,\,k}}{\omega'_{p-k,\,k}} \\ +\Phi'_{p-k,\,k}(\theta^*_{p-k,\,k})\frac{\theta^*_{p-k,\,k}}{\omega^{*\prime}_{p-k,\,k}}+\Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k})\frac{(-1)^p\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}} \\ +\Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}^*_{p-k,\,k})\frac{(-1)^p\sqrt{b^2-\overline{\theta}^{*2}_{p-k,\,k}}}{\overline{\omega}^{*\prime}_{p-k,\,k}}\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} v=R\Bigg\{-\Phi'_0(\theta_0)\frac{\sqrt{a^2-\theta_0^2}}{\omega'_0}+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\Bigg[\Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{(-1)^p\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}}{\omega'_{p-k,\,k}} \\ +\Phi'_{p-k,\,k}(\theta^*_{p-k,\,k})\frac{(-1)^p\sqrt{a^2-\theta^{*2}_{p-k,\,k}}}{\omega^{*\prime}_{p-k,\,k}}-\Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k})\frac{\overline{\theta}_{p-k,\,k}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}} \\ -\Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}^*_{p-k,\,k})\frac{\overline{\theta}^*_{p-k,\,k}}{\overline{\omega}^{*\prime}_{p-k,\,k}}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{52}$$

Бесконечные суммы, стоящие в правых частях (51) и (52), при всяком конечном (x, y, t) обрываются и содержат только конечное число членов. Функции u и v непрерывны и имеют непрерывные производные первых двух порядков во всем пространстве (E) и удовлетворяют уравнениям теории упругости и граничным условиям (4) и (5) или (6) и (7), за исключением изолированных поверхностей $T_{p-k,k}$, $\overline{T}_{p-k,k}$, $T^{*}_{p-k,k}$, $\overline{T}^{*}_{p-k,k}$, на которых они в силу (50) обращаются в бесконечность. Физически это значит, что составляющие смещения обращаются в бесконечность на фронтах распространения падающих и отраженных волн. Эти разрывные решения задачи можно истолковать как обобщенные решения в определенном смысле, на котором в данной статье мы не останавливаемся.

Составляя выражения для u и v, в предположении, что имеется только падающий пеперечный потенциал, мы получим также разрывные решения. Решение задачи в том случае, когда присутствуют одновременно оба падающие продольный и поперечный потенциалы, в силу принципа наложения возмущений, будет сумма предыдущих, которые будут также разрывными на изолированных поверхностях, количество которых (поверхностей) будет с возрастанием времени t возрастать беспредельно.

7. Переходим теперь к ассимптотическому разложению выражений (51) и (52) для u и v в том предположении, что x и y фиксированы, а t стремится к бесконечности.

Прежде чем перейти к разложению выражений (51) и (52), выведем некоторые вспомогательные формулы.

Все комплексные функции $\theta(x, y, t)$ с различными значками суть корни уравнения вида:

$$\omega \equiv t-\theta x+\alpha\sqrt{a^2-\theta^2}+\beta\sqrt{b^2-\theta^2}=0, \tag{53}$$

где

$$\alpha=\alpha_1 y+\alpha_2 \text{ и } \beta=\beta_1 y+\beta_2 \ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\text{—постоянные}),$$

причем:

$$\alpha_1\beta_1=0, \quad \alpha_1+\beta_1=\pm 1.$$

Из уравнения (53) получаем:

$$t=\Omega(\theta)=\theta x-\alpha\sqrt{a^2-\theta^2}-\beta\sqrt{b^2-\theta^2}. \tag{54}$$

Разлагая правую часть этого уравнения при больших θ по степеням θ, получим:

$$t=\Omega(\theta)=\theta\eta\left[1-\frac{i}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!\,2^{2n-1}}\,\frac{\alpha a^{2n}+\beta b^{2n}}{\theta^{2n}}\right], \tag{55}$$

где

$$\eta=x+i(\alpha+\beta).$$

Этот ряд сходится равномерно в плоскости комплексного переменного θ вне круга достаточно большого радиуса с центром в начале.

Обращая ряд (53), будем иметь:

$$\theta = C_1 t + C_0 + \frac{C_{-1}}{t} + \frac{C_{-2}}{t^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{t^n} + \ldots = \sum_{n=-1}^{\infty} C_{-n} t^{-n}. \tag{56}$$

Этот ряд сходится равномерно для достаточно больших значений t. Коэфициенты C_n вычисляются по формулам:

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta\, \Omega'(\zeta) [\Omega(\zeta)]^{n-1} d\zeta, \tag{57}$$

где C—круг достаточно большого радиуса с центром в начале; причем интегрирование происходит по направлению движения часовой стрелки.

Для того, чтобы получить формулу (57), достаточно умножить обе части (56) на $\frac{1}{2\pi i}\Omega'(\zeta)\,\Omega^{n-1}(\zeta)$ и проинтегрировать.

Пусть $f(\theta)$—функция комплексного переменного, аналитическая вне некоторой окружности достаточно большого радиуса и имеющая на бесконечности полюс порядка ν. Заменяя θ через ее выражение (56) и разлагая в ряд по степеням t, получим:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} C'_{-n} t^{-n}, \tag{58}$$

где

$$C'_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, \Omega'(\zeta)\, \Omega^{n-1}(\zeta)\, d\zeta. \tag{59}$$

Рассмотрим сперва выражения:

$$\begin{aligned} u' &= R\left[\Phi_0'(\theta_0)\frac{\theta_0}{\omega_0'}\right] + \sum_{p=0}^{\infty} u'_p, \\ v' &= -R\left[\Phi_0'(\theta_0)\frac{\sqrt{a^2-\theta_0^2}}{\omega_0'}\right] + \sum_{p=0}^{\infty} v'_p, \end{aligned} \tag{60}$$

где

$$u'_p = \sum_{k=0}^{p} \left\{ R \left[\Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k}) \frac{\theta_{p-k,\,k}}{\omega'_{p-k,\,k}} + (-1)^p \Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k}) \frac{\sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}} \right] \right\},$$

(61)

$$v'_p = \sum_{k=0}^{p} \left\{ R \left[(-1)^p \Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k}) \frac{\sqrt{b^2-\theta^2_{p-k,\,k}}}{\omega'_{p-k,\,k}} - \Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k}) \frac{\overline{\theta}_{p-k,\,k}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}} \right] \right\}.$$

Найдем теперь ассимптотическое разложение u'_p и v'_p по степеням t при больших t. Предположим, что $\Phi'_0(\theta)$ — функция аналитическая во всей плоскости θ с купюрой $(-a, +a)$ на вещественной оси и имеет полюс порядка $\nu-1$ на бесконечности. Функции $A(\theta)$ и $B(\theta)$, в силу (18) и (19), суть аналитические функции во всей плоскости с купюрой $(-b, +b)$ и на бесконечности имеют полюс второго порядка. Следовательно, согласно формулам (38) и (39), функции $\Phi'_{p-k,\,k}$ и $\Psi'_{p-k,\,k}$ суть аналитические функции на всей плоскости комплексного переменного с купюрой $(-b, +b)$ и на бесконечности имеют полюс порядка $2p+\nu+1$.

Обозначая через $U_{p-k,\,k}$ и $V_{p-k,\,k}$ выражения:

$$U_{p-k,\,k} = \Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k}) \frac{\theta_{p-k,k}}{\omega'_{p-k,\,k}} + \Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k}) \frac{(-1)^p \sqrt{b^2-\overline{\theta}^2_{p-k,\,k}}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}},$$

(62)

$$V_{p-k,\,k} = \Phi'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k}) \frac{(-1)^p \sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}}{\omega'_{p-k,\,k}} - \Psi'_{p-k,\,k}(\overline{\theta}_{p-k,\,k}) \frac{\overline{\theta}_{p-k,\,k}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}},$$

будем иметь для них разложения:

$$U_{p-k,\,k} = \sum_{n=-(2p+\nu+1)}^{+\infty} C^{(p,\,k)}_{-n}\, t^{-n}, \qquad V_{p-k,\,k} = \sum_{n=-(2p+\nu+1)}^{+\infty} C'^{(p,\,k)}_{-n}\, t^{-n} \tag{63}$$

сходящиеся при больших t.

Согласно формуле (57), коэффициенты $C^{(p,\,k)}_{-n}$ и $C'^{(p,\,k)}_{-n}$ вычисляются по формулам:

$$C^{(p,\,k)}_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Big\{ \Phi'_{p-k,k}(\zeta) \frac{\zeta}{\omega'_{p-k,\,k}} \Omega'_{p-k,\,k}(\zeta)\, \Omega^{n-1}_{p-k,k}(\zeta)$$

$$+ \Psi'_{p-k,k}(\zeta) \frac{(-1)^p \sqrt{b^2-\zeta^2}}{\overline{\omega}'_{p-k,\,k}} \overline{\Omega}'_{p-k,k}(\zeta)\, \overline{\Omega}^{n-1}_{p-k,k}(\zeta) \Big\} d\zeta$$

и

$$C_{-n}^{\prime(p,\,k)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\left\{\Phi'_{p-k,k}(\zeta)\frac{(-1)^p\sqrt{a^2-\zeta^2}}{\omega'_{p-k,\,k}}\Omega'_{p-k,k}(\zeta)\;\Omega^{n-1}_{p-k,k}(\zeta)\right.$$

$$\left.-\Psi'_{p-k,k}(\zeta)\frac{\zeta}{\overline{\omega}'_{p-k,k}}\overline{\Omega}'_{p-k,k}(\zeta)\;\overline{\Omega}^{n-1}_{p-k,k}(\zeta)\right\}d\zeta$$

где C—окружность достаточно большого радиуса, а интегрирование происходит против направления движения часовой стрелки. Здесь положено:

$$\Omega_{p-k,\,k}=t-\omega_{p-k,\,k};\quad \overline{\Omega}_{p-k,\,k}=t-\overline{\omega}_{p-k,\,k}.$$

Принимая во внимание последние равенства, на основании (38) и (39), мы напишем:

$$C_{-n}^{(p,\,k)}=-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\left\{\zeta A^{p-2s+1}(\zeta)\,\Phi_0''(\zeta)\,S_{p,k}^{(s)}\,\Omega^{n-1}_{p-k,k}(\zeta)\right.$$

$$\left.+B(\zeta)\sqrt{b^2-\zeta^2}\;A^{p-2s}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\;T^{(s)}_{p,k}\,\overline{\Omega}^{\,n-1}_{p-k,k}(\zeta)\right\}d\zeta$$

$$C_{-n}^{\prime(p,\,k)}=-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\left\{\sqrt{a^2-\zeta^2}\;A^{p-2s+1}(\zeta)\;\Phi_0'(\zeta)\;S^{(s)}_{p,\,k}\,\Omega^{n-1}_{p-k,\,k}(\zeta)\right.$$

$$\left.-\zeta B(\zeta)\,A^{p-2s}(\zeta)\;\Phi_0'(\zeta)\;T^{(s)}_{p,\,k}\,\overline{\Omega}^{n-1}_{p-k,k}(\zeta)\right\}d\zeta,\tag{64}$$

где

$$S^{(s)}_{p,\,k}=(-1)^{k+s}\binom{p-k+1}{s}\binom{p-s}{p-k},\quad T^{(s)}_{p,\,k}=(-1)^{k+s}\binom{p-k}{s}\binom{p-s}{p-k}.\tag{65}$$

На основании (61) для u'_p и v'_p мы получим разложения:

$$u'_p=\sum_{n=-(2p+\nu+1)}^{\infty}C^{(p)}_{-n}\;t^{-n},\qquad v'_p=\sum_{n=-(2p+\nu+1)}^{\infty}C'^{(p)}_{-n}\;t^{-n},\tag{66}$$

где в силу (61), (62), (63) и (64) имеем:

$$C_{-n}^{(p)} = -\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\zeta A^{p-2s+1}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\,K_{p,s}^{(n)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B\sqrt{b^2-\zeta^2}\,A^{p-2s}(\zeta)\Phi_0'(\zeta)\,\overline{K}_{p,s}^{(n)}\right]d\zeta\right\},$$

(67)

$$C_{-n}^{\prime(p)} = -\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\sqrt{a^2-\zeta^2}\,A^{p-2s+1}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\,K_{p,s}^{(n)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \zeta B(\zeta)\,A^{p-2s}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\,\overline{K}_{p,s}^{(n)}\right]d\zeta\right\},$$

где

$$K_{p,s}^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} S_{p,k}^{(s)}\,\Omega_{p,k}^{n-1}, \qquad \overline{K}_{p,s}^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} T_{p,k}^{(s)}\,\overline{\Omega}_{p-k,k}^{n-1}. \tag{68}$$

Покажем теперь, что коэфициенты $C_{-n}^{(p)}$ и $C_{-n}^{\prime(p)}$ равны нулю при всех $n = -(\nu+1),\ -(\nu+2),\ -(\nu+3),\ -\ldots$ Для этого рассмотрим выражение $\Omega_{p-k,k}$ и $\overline{\Omega}_{p-k,k}$:

$$\begin{aligned}\Omega_{p-k,k} &= x\zeta + \alpha_{k,p}\sqrt{a^2-\zeta^2} + \beta_k\sqrt{b^2-\zeta^2}\\ \overline{\Omega}_{p-k,k} &= x\zeta + \overline{\alpha}_{k,p}\sqrt{a^2-\zeta^2} + \overline{\beta}_{k,p}\sqrt{b^2-\zeta^2}.\end{aligned} \tag{69}$$

Разлагая правые части этих уравнений по степеням ζ при больших ζ, получаем:

$$\begin{aligned}\Omega_{p-k,k} &= \zeta\chi_p\left\{1 + \frac{i}{\chi_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!\,2^{2m-1}}\,\frac{\alpha_{k,p}a^{2m}+\beta_k b^{2m}}{\zeta^{2m}}\right\} = \zeta\chi_p(1+A_{k,p}),\\ \overline{\Omega}_{p-k,k} &= \zeta\chi_p\left\{1 + \frac{i}{\chi_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!\,2^{2m-1}}\,\frac{\overline{\alpha}_{k,p}a^{2m}+\overline{\beta}_{k,p}b^{2m}}{\zeta^{2m}}\right\} = \zeta\chi_p(1+\overline{A}_{k,p}),\end{aligned} \tag{70}$$

где в силу уравнений (36) и (37) имеем:

$$\begin{aligned}\alpha_{k,p} &= (-1)^p y + (p-k)h + f,\quad \beta_k = kh,\\ \overline{\alpha}_{k,p} &= (p-k)h + f,\quad \overline{\beta}_{k,p} = (-1)^p\left(y - \frac{h}{2}\right) + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\end{aligned} \tag{71}$$

и

$$\chi_p = x - i\left\{(-1)^p\left(y - \frac{h}{2}\right) + \left(p + \frac{1}{2}\right)h + f\right\} \tag{72}$$

через $A_{k,p}$ и $\overline{A}_{k,p}$ нами обозначены ряды, стоящие в скобках в выражении (68). $A_{k,p}$ и $\overline{A}_{k,p}$ в силу (71) мы можем переписать еще в следующем виде:

$$A_{k,p}=\frac{i}{\zeta_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_{2m}k+d'_{p,2m}}{\zeta^{2m}}, \qquad \overline{A}_{k,p}=\frac{i}{\zeta_p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_{2m}k+d''_{p,2m}}{\zeta^{2m}}, \tag{73}$$

где

$$d_{2m}=\frac{(2m-2)!}{m!\,(m-1)!\,2^{2m-1}}\,h\,(b^{2m}-a^{2m}),$$

$$d'_{p,2m}=\frac{(2m-2)!}{m!\,(m-1)!\,2^{2m-1}}\,a^{2m}\left\{(-1)^p\left(y-\frac{h}{2}\right)+\left(p+\frac{1}{2}\right)h+f\right\}, \tag{74}$$

$$d''_{p,2m}=\frac{(2m-2)!}{m!\,(m-1)!\,2^{2m-1}}\left\{(ph+f)\,a^{2m}+\left[(-1)^p\left(y-\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}\right]b^{2m}\right\}.$$

Так как ζ_p отлична от нуля для всех точек внутри нашего слоя, мы имеем для больших ζ разложение:

$$\Omega^{n-1}_{p-k,\,k}=\zeta^{n-1}\zeta_p^{n-1}\sum_{\rho=0}^{\infty}\binom{n-1}{\rho}A^{\rho}_{k,p}, \quad \overline{\Omega}^{n-1}_{p-k,\,k}=\zeta^{n-1}\zeta_p^{n-1}\sum_{\rho=0}^{\infty}\binom{n-1}{\rho}\overline{A}^{\rho}_{k,p}, \tag{75}$$

при любых целых положительных или отрицательных n.

Тогда в силу (68) имеем:

$$K^{(n)}_{p,s}=\zeta^{n-1}\zeta_p^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n-1}{m}B^{(m)}_{p,s}, \qquad \overline{K}^{(n)}_{p,s}=\zeta^{n-1}\zeta_p^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n-1}{m}\overline{B}^{(m)}_{p,s}, \tag{76}$$

где

$$B^{(m)}_{p,s}=\sum_{k=0}^{p}S^{(s)}_{p,k}A^{m}_{k,p}, \qquad \overline{B}^{(m)}_{p,k}=\sum_{k=0}^{p}T^{(s)}_{p,k}\overline{A}^{m}_{k,p} \tag{77}$$

Докажем теперь следующие тождества:

$$B^{(0)}_{p,s}=\overline{B}^{(0)}_{p,s}=B^{(1)}_{p,s}=\overline{B}^{(1)}_{p,s}=\ldots=B^{(p-2s-1)}_{p,s}=\overline{B}^{(p-2s-1)}_{p,s}\equiv 0. \tag{78}$$

В силу (73) имеем:

$$A^{m}_{p,k}=\frac{i^m}{\zeta_p^m\zeta^{2m}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\chi^{(k)}_{l,m}}{\zeta^{2l}}, \qquad \overline{A}^{m}_{k,p}=\frac{i^m}{\zeta_p^m\zeta^{2m}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\overline{\chi}^{(k)}_{l,m}}{\zeta^{2l}}, \tag{79}$$

где $\chi_{l,m}^{(k)}$ и $\overline{\chi}_{l,m}^{(k)}$ суть полиномы от k степени m:

$$\chi_{l,m}^{(k)}=\sum_{j=0}^{m} d_{l,j}\,k^j,\quad \overline{\chi}_{l,m}^{(k)}=\sum_{j=0}^{m}\overline{d}_{l,j}\,k^j. \tag{80}$$

На основании (79), формулы (77) перепишем так:

$$B_{p,s}^{(m)}=\frac{1}{\zeta_p^m\,\zeta^{2m}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_{l,m}}{\zeta^{2l}},\quad \overline{B}_{p,s}^{(m)}=\frac{1}{\zeta_p^m\,\zeta^{2m}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\overline{D}_{l,m}}{\zeta^{2l}}, \tag{81}$$

где

$$D_{l,m}=\sum_{k=0}^{p}\chi_{l,m}^{(k)}S_{p,k}^{(s)},\quad \overline{D}_{l,m}=\sum_{k=0}^{p}\overline{\chi}_{l,m}^{(k)}\,T_{p,k}^{(s)}. \tag{82}$$

В силу (80), (82) можно переписать так:

$$D_{l,m}=\sum_{j=0}^{m} d_{l,j}\,H_{p,s}^{(j)},\quad \overline{D}_{l,m}=\sum_{j=0}^{m}\overline{d}_{l,j}\,L_{p,s}^{(j)}; \tag{83}$$

здесь

$$H_{p,s}^{(j)}=\sum_{k=0}^{p}S_{p,k}^{(s)}k^j,\quad L_{p,s}^{(j)}=\sum_{k=0}^{p}T_{p,s}^{(s)}k^j. \tag{84}$$

На основании (65) последние выражения можно переписать в следующем виде:

$$H_{p,s}^{(j)}=\frac{(p-s)\ldots(p-2s+2)}{s!}\left\{(p+1)\sum_{i=0}^{j}s^i\binom{j}{i}J_{p-2s+1,\,j-i}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}s^i\,J_{p-2s+1,\,j-i+1}\right\}, \tag{85}$$

$$L_{p,s}^{(j)}=\binom{p-s}{s}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}s^i\,J_{p-2s,\,j-i},$$

где через $J_{m,n}$ обозначено выражение:

$$J_{m,n}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{m}{k}k^n=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{m!}{k!\,(m-k)!}k^n. \tag{86}$$

Докажем теперь, что

$$J_{m,n}=\begin{cases} 0 & \text{при } m>n, \\ (-1)^m a_{n-m}(n)\, m! & \text{при } m\leqq n, \end{cases} \tag{87}$$

где $a_i(n)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ суть коэфициенты разложения:

$$x^n=x(x-1)\ldots(x-n+1)+a_1x(x-1)\ldots(x-n+2)+\ldots+a_{n-1}x. \tag{88}$$

Заметим здесь, что:

$$a_0=1, \quad a_1=\frac{n(n-1)}{2}. \tag{89}$$

Заменяя в формуле (86) k^n через

$$k^n=\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, k(k-1)\ldots(k-n+i+1),$$

при $m>n$ получим:

$$J_{m,n}=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{m!}{(k-n+i)!\,(m-k)!}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(m-1)\ldots(m-n+i+1)\sum_{k=0}^{p}(-1)^p \frac{(m-n+i)!}{(k-n+i)!\,(m-k)!}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(m-1)\ldots(m-n+i+1)(1-1)^{m-n+i}=0.$$

Аналогично этому доказывается, что при $m\leqq n$:

$$J_{m,n}=(-1)^m a_{n-m}(n)\, m!,$$

что и требовалось доказать.

Выпишем следующие частные формулы, которые понадобятся нам ниже:

$$J_{m,m}=(-1)^m m!, \quad J_{m,m+1}=(-1)^m (m+1)!\, \frac{m}{2}. \tag{90}$$

В силу (87) из (85) получаем:

$$H_{p,s}^{(j)}=0, \quad L_{p,s}^{(j)}=0 \quad \text{при } j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2s-1, \tag{91}$$

$$H_{p,s}^{(p-2s)}=L_{p,s}^{(p-2s)}=(-1)^p \frac{(p-s)!}{s!} \tag{92}$$

и

$$H_{p,s}^{(p-2s+1)}=(-1)^p\frac{(p-s)!}{s!}\frac{(p+1)(p-2s)}{2},\tag{93}$$

$$L_{p,s}^{(p-2s+1)}=(-1)^p\frac{(p-s)!}{s!}\frac{p(p-2s+1)}{2}.$$

На основании (91) из (83) имеем:

$$D_{l,m}=\overline{D}_{l,m}=0 \quad \text{при } m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2s-1.$$

Следовательно, из (86) следует (78), что и требовалось доказать.

На основании (78), из (76) получаем:

$$K_{p,s}^{(m)}=\frac{P(\zeta)}{\zeta^{2p-4s-n+1}},\qquad \overline{K}_{p,s}^{(m)}=\frac{Q(\zeta)}{\zeta^{2p-4s-n+1}},\tag{94}$$

где $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ имеют вид:

$$P(\zeta)=P_0+\frac{P_2}{\zeta^2}+\frac{P_4}{\zeta^4}+\cdots,\tag{95}$$

$$Q(\zeta)=Q_0+\frac{Q_2}{\zeta^2}+\frac{Q_4}{\zeta^4}+\cdots.$$

Легко видеть, что

$$P_0=Q_0=\binom{n-1}{p-2s}\frac{(p-s)!}{s!}\frac{h^{p-2s}(b^2-a^2)^{p-2s}}{2^{p-2s}}\frac{1}{\zeta_p^{p-2s-n+1}}.\tag{96}$$

В силу (94) из (67) получаем:

$$C_{-n}^{(p)}=C_{-n}^{'(p)}=0 \quad \text{при } -n=\nu+3,\ \nu+4,\ \ldots$$

Покажем теперь также, что

$$C_{-(\nu+1)}^{(p)}=C_{-(\nu+1)}^{'(p)}=C_{-(\nu+2)}^{(p)}=C_{-(\nu+2)}^{'(p)}=0.$$

Для этого воспользуемся формулами (18) и (19), откуда имеем:

$$B\sqrt{a^2-\zeta^2}=-\zeta A(\zeta)+A_1(\zeta),\tag{97}$$

где $A_1(\zeta)$ — регулярная при больших ζ функция, имеющая полюс первого порядка на бесконечности.

Легко видеть также, что

$$A\sqrt{a^2-\zeta^2}=-i\zeta A(\zeta)+A_2(\zeta),\quad B(\zeta)=-iA(\zeta)+B_1(\zeta),\tag{98}$$

где $A_2(\zeta)$ и $B_1(\zeta)$ — регулярные и ограниченные функции на бесконечности.

Принимая во внимание (97) и (98), формулы (67) перепишутся в следующем виде:

$$C_{-n}^{(p)} = -\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C A^{p-2s+1}(\zeta)\,\zeta\,\Phi_0'(\zeta)\left[K_{p,s}^{(n)} - \overline{K}_{p,s}^{(n)}\right]d\zeta\right.$$

$$\left. -\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C A_1(\zeta)\,A^{p-2s}\,\Phi_0'(\zeta)\,\overline{K}_{p,s}^{(n)}\,ds\right\}\right\},$$

$$C_{-n}^{\prime(p)} = (-1)^p\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C iA^{p-2s+1}(\zeta)\,\zeta\,\Phi_0'(\zeta)\left[K_{p,s}^{(n)} - \overline{K}_{p,s}^{(n)}\right]d\zeta\right\} \tag{99}$$

$$-(-1)^p\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C A_2(\zeta)\,A^{p-2s}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\,K_{p,s}^{(n)}\,d\zeta\right\}$$

$$+(-1)^p\sum_{s=0}^{\infty} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta B_1(\zeta)\,A^{p-2s}(\zeta)\,\Phi_0'(\zeta)\overline{K}_{p,s}^{(n)}\,d\zeta\right\}.$$

Отсюда, в силу (96) и (94), получаем окончательно:

$$C_{-n}^{(p)} = C_{-n}^{\prime(p)} = 0 \quad \text{при} \quad -n = \nu+1,\ \nu+2,\ \ldots, \tag{100}$$

что требовалось доказать.

В силу (100) из (66) и (60) получим:

$$u' = \sum_{n=-\nu}^{\infty} b_{-n}\,t^{-n}, \quad v' = \sum_{n=-\nu}^{\infty} b'_{-n}\,t^{-n}. \tag{101}$$

Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что выражения:

$$u'' = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\Phi'_{p-k,k}(\theta^*_{p-k,k})\frac{\partial\theta^*_{p-k,k}}{\partial x} + \Psi'_{p-k,k}(\overline{\theta}^*_{p-k,k})\frac{\partial\overline{\theta}^*_{p-k,k}}{\partial y}\right],$$

$$v'' = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\Phi'_{p-k,k}(\theta^*_{p-k,k})\frac{\partial\theta^*_{p-k,k}}{\partial y} - \Psi'_{p-k,k}(\overline{\theta}^*_{p-k,k})\frac{\partial\overline{\theta}^*_{p-k,k}}{\partial x}\right]$$

при бесконечном времени t и фиксированных x и y разлагаются в ряды, аналогичные (101). Отсюда вытекает, в силу формул (51) и (52), что составляющие вектора смещения $u=u'+u''$, $v=v'+v''$, когда в точке $x=0$, $y=f$ с момента $t=0$ действует источник продольных волн вышеуказанного типа, при бесконечном t, имеют особенность такого же характера, как если бы не существовали границы отражения и упругая среда по всем направлениям была бы бесконечной. Точно такой же результат получим для того случая, когда в точке $(0, f)$ с момента $t=0$ действует источник поперечных волн.

Нам остается выяснить ассимптотический вид выражения (51) и (52), когда x и t оба стремятся одновременно к бесконечности так, чтобы их отношение $\frac{t}{x}=c$, где c — обратная величина скорости поверхностных волн Rayleigh'а. Как известно, уравнение:

$$F(\theta)=(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}=0$$

имеет только два вещественных корня $\pm c$, где $c>b$ [3].

Но, как не трудно видеть, в формулах для $\Phi'_{m,n}$, $\Psi'_{m,n}$, $\overline{\Phi}'_{m,n}$ и $\overline{\Psi}'_{m,n}$, куда $F(\theta)$ входит с соответствующими аргументами в знаменатели, она не обращается в ноль при конечных значениях t и $0 \leqq y \leqq h$. Следовательно, когда точечный источник находится внутри слоя, поверхностные волны Rayleigh'а на конечном расстоянии от источника не существуют. Они возникают на поверхности лишь на далеком расстоянии от источника, по истечении бесконечного времени с момента начала колебания.

В случае полупространства с внутренним источником, как это выяснили В. И. Смирнов и С. Л. Соболев в цитированной статье «Sur une méthode nouvelle...», эти поверхностные волны на далеком расстоянии оставляют на границе полупространства смещения, отличные от нуля. Что касается слоя с внутренним точечным источником, вопрос о характере смещения на далеких точках поверхности по истечении бесконечного времени, ввиду трудности вычислительных работ, остается пока открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Smirnov et S. Sobolev. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques. Тр. Сейсм. Ин. АН СССР № 20, Ленинград. 1932.
2. С. Л. Соболев. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Тр. ФМИ АН СССР, V.
3. В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболев. К вопросу о распространении упругих волн на границе двух сред с различными упругими свойствами. Тр. СИ АН СССР № 10. Ленинград. 1931.

ი. ვეკუა

ორი პარალელური სიბრტყით შემოსაზღვრულ უსასრულო ფენაში დრეკად ტალღათა გავრცელების შესახებ

რეზუმე

ვთქვათ ორი პარალელური სიბრტყით შემოსაზღვრულ უსასრულო ფენის შიგნით $(0, f)$ წერტილზე (იხ. ნახ. 1) მოთავსებულია სიგრძივი ტალღების წყარო, რომელიც განსაზღვრულია (23) ფორმულით, სადაც Φ არის ნებისმიერი ანალიზური ფუნქცია, ხოლო θ_0 აკმაყოფილებს (24) განტოლებას. φ_0 პოტენციალის ფენის საზღვრებიდან არეკვლის შედეგათ ჩვენ მივიღებთ ოთხ პოტენციალს: φ_{00} და ψ_{00}-ს საზღვრიდან $y=0$, ხოლო φ^*_{00} და ψ^*_{00}-ს საზღვრიდან $y=h$. ეს უკანასკნელი პოტენციალები დროის განმავლობაში თავის მხრივ აირეკლებიან და მოგვცემენ რვა ანარეკლ პოტენციალებს: φ_{10}, φ_{01}, ψ_{10}, ψ_{01} და φ^*_{10}, φ^*_{01}, ψ^*_{10}, ψ^*_{01}, სადაც φ ნიშნაკებით აღნიშნავენ სიგრძივ—, ხოლო ψ ნიშნაკებით განივ პოტენციალებს. ამგვარად დროის გადიდებასთან ერთად გრძელდება არეკვლის პროცესი ფენის საზღვრებიდან და ჩვენ ვღებულობთ უსასრულო მიმდევრობას არეკვლილი სიგრძივი და განივი პოტენციალებისას:

$$\varphi_{m,n},\ \varphi^*_{m,n},\ \psi_{m,n},\ \psi^*_{m,n}\ (m, n=0, 1, 2, 3,\ldots)$$

ცხადია, დროის ყოველ სასრულო მომენტისათვის ეს მიმდევრობა შეიცავს წევრთა სასრული რაოდენობას. პოტენციალები $\varphi_{m,n}$ და $\psi_{m,n}$ განისაზღვრებიან (32) ფორმულებით, სადაც $\Phi_{m,n}$ და $\Psi_{m,n}$ ანალიზური ფუნქციებია. $\theta_{m,n}$ და $\bar{\theta}_{m,n}$ აკმაყოფილებენ (36) განტოლებებს. $\Phi_{m,n}$ და $\Psi_{m,n}$ ფუნქციები განისაზღვრებიან პირველ დაწყებით პოტენციალის Φ_0 საშუალებით (38) და (39) ფორმულებით. შემდეგ ავტორი შეისწავლის ანალოგიურ საკითხებს იმ შემთხვევაში, როცა ფენის შიგნით მოთავსებულია განივი ტალღათა წყარო, განსაზღვრული (42′) ფორმულებით, სადაც ϑ_0 აკმაყოფილებს (43) განტოლებას. მე-7-ე პარაგრაფში განხილულია საკითხი მიღებული ფორმულების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ, როცა $t \rightarrow \infty$ და ფენის წერტილი კოორდინატებით x, y ფიქსირებულია.