სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის საქართველოს ფილიალის მოამბე, ტ. I № 7, 1940
СООБЩЕНИЯ ГРУЗИНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР, Т. I № 7, 1940
MITTEILUNGEN d. GEORGISCHEN ABTEILUNG d. AKADEMIE d. WISS. d. USSR, Bd. I Nr 7, 1940

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. III[1]

Пусть T—конечная многосвязная область, ограниченная простыми изолированными контурами $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, из которых первый содержит внутри себя все остальные. Совокупность этих контуров будем обозначать через S. Предположим, что каждый из контуров S_ν имеет непрерывно изменяющуюся кривизну.

Рассмотрим краевую задачу: требуется найти в области T регулярное решение уравнения

$$L(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

по граничному условию

$$u = \psi(t) \text{ на } S, \qquad (1)$$

где $\psi(t)$—заданная непрерывная функция точки t границы S. Предполагаем, что коэфициенты уравнения (E_0)—a, b и c суть полиномы переменных x и y.

Для решения этой задачи мы воспользуемся общим представлением решений уравнения (E_0), полученным нами недавно [1].

Нами установлено, что любое, в области T регулярное решение уравнения (E_0) имеет вид:

$$u = R\left\{\alpha(z,\bar{z})\,\varphi(z) + \int_{z_0}^{z} \beta(z,\bar{z};\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right\}, \qquad (2)$$

где R—знак вещественной части, $\alpha(z,\bar{z})$ и $\beta(z,\bar{z};\zeta)$—целые функции своих аргументов, выражающиеся при помощи коэфициентов a, b и c, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$—фиксированная точка в области T, $\varphi(z)$—аналитическая функция, имеющая вид:

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(z)\lg(z - a_\nu), \qquad (3)$$

[1] Первые части этой работы опубликованы в № 1 и № 3 первого тома настоящего журнала; при ссылках на формулы этих частей перед номером формулы мы ставим соответственно цифру I или II.

причем $f(z)$—произвольная голоморфная функция в области T, a_ν—фиксированная точка внутри S_ν и $g_\nu(z)$—целая функция, связанная с $f(z)$ следующим образом:

$$g_\nu(z)=ic_\nu+\int_{S_\nu}\gamma_k(z,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta+\int_{S_\nu}\gamma'_k(z,\bar{\zeta})\bar{f}(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}, \tag{4}$$

где c_ν—произвольные вещественные постоянные, $\gamma_\nu(z,\zeta)$ и $\gamma'_\nu(z,\bar{\zeta})$ — целые функции своих аргументов[1].

Принимая во внимание формулы (3) и (4), формула (2) примет вид:

$$u=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\Omega(z,a_\nu)+R\left\{\alpha(z,\bar{z})f(z)+\int_{z_0}^{z}\beta(z,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta\right\}$$

$$+\int_S\delta(z,\bar{z};\zeta)f(\zeta)\,d\zeta+\int_S\bar{\delta}(\bar{z},z,\bar{\zeta})\bar{f}(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}, \tag{5}$$

где $\Omega(z,a_\nu)$—элементарное решение уравнения (E_0), получающееся из формулы (2) путем подстановки в ней вместо $\varphi(z)$ функции $\frac{1}{2\pi}\lg(z-a_\nu)$. Следовательно, $\Omega(z,a_\nu)$ регулярна в области T и имеет логарифмическую особенность в точке a_ν, $\delta(z,\bar{z},\zeta)$—известная функция.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ голоморфна в области T и непрерывна в $T+S$; причем, пусть граничные значения ее удовлетворяют условиям Hölder'a. Тогда, как это доказано акад. Н. И. Мусхелишвили [2], функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_S\frac{k(t)}{t-z}\,dt, \tag{6}$$

где $k(t)$—вещественная функция точки t границы S. При этом, заданием $f(z)$ функция $k(t)$ определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной на каждой внутренней кривой S_ν.

Подставляя (6) в (5) и переходя в последней к пределу, когда z стремится к границе S, то, в силу (1), после некоторых преобразований, получим сингулярное интегральное уравнение:

$$p(t)\,k(t)+q(t)\frac{1}{\pi}\int_S\frac{k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_S P(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau=\psi(t)-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\Omega(t,a_\nu), \tag{7}$$

---

[1] Заметим, что эта формула получается легко из формулы (6) работы [1], в которой по недосмотру пропущена произвольная аддитивная постоянная c_k.

где $P(t,\tau)$—функция, обладающая логарифмической особенностью в точке $t=\tau$,

$$p(t)=\alpha(t,\bar{t})+\bar{\alpha}(\bar{t},t), \quad q(t)=i[\bar{\alpha}(\bar{t},t)-\alpha(t,\bar{t})].$$

В частности, если $a\equiv b\equiv 0$, то $p=1$, $q=0$ и мы будем иметь регулярное уравнение Фредгольма.

Уравнение (7) можно легко свести к эквивалентному уравнению Фредгольма.

Пусть

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau.$$

Тогда, согласно известных свойств интегралов типа Коши, напишем:

$$k(t)=\Phi_j(t)-\Phi_a(t), \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=i[\Phi_j(t)+\Phi_a(t)]. \tag{8}$$

В силу этих формул, уравнение (7) примет вид:

$$[p(t)+iq(t)]\,\Phi_j(t)=[p(t)-iq(t)]\,\Phi_a(t)+F(t), \tag{9}$$

где

$$F(t)=\psi(t)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\,\Omega(t,a_\nu)-\int\limits_S P(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Принимая во внимание, что $p^2+q^2\neq 0$ на S, (9) можем переписать так:

$$\Phi_j(t)=A(t)\,\Phi_a(t)+B(t), \tag{11}$$

где

$$A(t)=\frac{p(t)-iq(t)}{p(t)+iq(t)},\ B(t)=\frac{F(t)}{p(t)+iq(t)}. \tag{12}$$

Итак, требуется найти голоморфные функции внутри и вне области T, удовлетворяющие условию (11), причем искомая функция в бесконечной области исчезает на бесконечности.

Легко проверить, что эта задача имеет единственное решение, определяемое формулой:

$$\Phi(z)=e^{g(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{B(t)\,e^{-g_j(t)}}{t-z}\,dt, \tag{13}$$

где

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\lg A(t)}{t-z}\,dt.$$

Подставляя (13) в первое из равенств (8) и используя формулы (10) и (12), после простых выкладок, получим интегральное уравнение Фредгольма, эквивалентное уравнению (7):

$$k(t) = \int_S H(t, \tau)\, k(\tau)\, d\tau + \psi^*(t) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \Omega^*(t, a)_\nu, \tag{14}$$

где $H(t, \tau)$, $\Omega^*(t, a_\nu)$ и $\psi^*(t)$—известные функции; причем $\psi^*(t)$ и $\Omega^*(t, a_\nu)$ зависят соответственно от $\psi(t)$ и $\Omega(t, a_\nu)$ и эти функции тождественно исчезают тогда и только тогда, когда исчезают тождественно $\psi(t)$ и $\Omega(t, a_\nu)$. Но так как $\Omega(t, a_\nu) \not\equiv 0$, то, очевидно, $\Omega^*(t, a_\nu) \not\equiv 0$.

Предположим, что поставленная краевая задача имеет единственное решение, т. е. соответствующая однородная задача имеет лишь правильное решение $u \equiv 0$. В этом случае из интегрального уравнения (14) определяются как функция $k(t)$, так и постоянные c_ν и мы получим, таким образом, полное решение задачи.

В самом деле, однородное интегральное уравнение, соответствующее (14), имеет n фундаментальных решений:

$$k(t) = \gamma_\nu \text{ на } S_\nu, \text{ где } \gamma_\nu\text{—постоянные } (\nu = 1, \ldots, n),$$
$$k(t) = 0 \text{ на } S_0.$$

Легко доказывается, в силу единственности решения, что других фундаментальных функций у однородного уравнения нет.

Пусть $\varkappa_\lambda(t)$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$—фундаментальные функции транспонированного интегрального уравнения. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (14) будет выполнение условий:

$$\int_S \varkappa_\lambda(t)\, \psi^*(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int_S \varkappa_\lambda(t)\, \Omega^*(t, a_\nu)\, dt = 0.$$

Из этой системы, которая в силу единственности решения также разрешима, находим постоянные c_ν. Найдя постоянные c_ν и функцию $k(t)$, легко получим решение краевой задачи.

Грузинский Филиал АН СССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 9.9.1940)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Elias Vecoua. Allgemeine Darstellung der Lösungen... Сообщения Груз. Фил. АН СССР, т. I, № 5, 1940, стр. 329—335.
2. Н. И. Мусхелишвили. О решении задачи Дирихле на плоскости. Сообщения Груз. Фил. АН СССР, т. I, № 2, 1940, стр. 99—106,