მათემატიკა

ილია ვეკუა

ჰარმონიული და მეტაჰარმონიული ფუნქციების შესახებ სივრცეში

რეზუმე

1. სამგანზომილებიან სივრცეში განვიხილოთ არე T, რომელშიც მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომლის შეერთება შეიძლება ამავე არის ნებისმიერ წერტილთან წრფის მონაკვეთით, რომელიც ყველა თავისი წერტილით T არეში მდებარეობს. ასეთ არეს ვუწოდოთ ვარსკლავი, ხოლო აღნიშნულ წერტილს ვარსკლავის ცენტრი. ცხადია, საზოგადოდ ვარსკლავში შეიძლება არსებობდეს მრავალი ცენტრი, მაგ. ამოზნექილი არე. ვთქვათ კოორდინატთა სისტემის სათავე მდებარეობს T ვარსკლავის ცენტრში, ხოლო r, φ, ϑ წერტილის სფერული კოორდინატებია სივრცეში.

ჩვენ ვამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 1.[1] ვთქვათ $\omega(r, \varphi, \vartheta)$ ჰარმონიული ფუნქციაა, რომელიც რეგულარულია T არეში ყველგან გარდა (შეიძლება) კოორდინატთა სათავისა, სადაც მას შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებულობა $\frac{1}{r}$ სახის. მაშინ ფუნქცია

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \omega(r, \varphi, \vartheta) + \int_0^r H(r, \rho, \lambda)\, \omega(\rho, \varphi, \vartheta)\, d\rho, \tag{1}$$

სადაც

$$H(r, \rho, \lambda) = -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\rho}{r-\rho}}\, J_1\left(\lambda\sqrt{r(r-\rho)}\right), \tag{2}$$

არის მეტაჰარმონიული, ე. ი. აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\Delta u + \lambda^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda^2 u = 0 \tag{3}$$

და რეგულარულია ყველგან T არეში გარდა (შეიძლება) სათავისა, სადაც მას შეიძლება ჰქონდეს განსაკუთრებულობა $\frac{1}{r}$ სახის. ყოველი ასეთი სახის მეტაჰარმონიული ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იყოს (1) სახით და ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

[1] ანალოგიური თეორემა ნებისმიერი T არისათვის ჩვენ მიერ დამტკიცებულია სიბრტყის შემთხვევაში შრომაში [1].

2. ვთქვათ კერძოდ T წარმოადგენს სფეროს, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს. მაშინ, როგორც ცნობილია, ყოველი ჰარმონიული ფუნქცია, რომელიც რეგულარულია T სფეროს შიგნით, შეიძლება დაიშალოს მწკრივად:

$$\omega(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Y_m(\varphi, \vartheta),$$

სადაც $Y_m(\varphi, \vartheta)$ ლაპლასის ფუნქციებია.

თუ შევიტანთ ამ მწკრივს (1) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}(\lambda r)\, Y'_m(\varphi, \vartheta), \tag{2}$$

სადაც

$$Y'_m(\varphi, \vartheta) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{m+1/2} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) Y_m(\varphi, \vartheta)$$

აგრეთვე ლაპლასის ფუნქციებია.

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ნებისმიერი მეტაჰარმონიული ფუნქცია, რეგულარული სფეროს შიგნით ცენტრით სათავეში, შეიძლება დაიშალოს (2) სახის მწკრივად.[1]

თუ (1) ფორმულაში ω-ს ნაცვლად $\frac{1}{r}$-ს ჩავსვამთ, მაშინ მივიღებთ $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ განტოლების ე. წ. ელემენტარულ ამოხსნას

$$\frac{\cos \lambda r}{r}.$$

სტალინის სახელობის თბილისის უნივერსიტეტი
დიფერენციალურ და ინტეგრალურ
განტოლებათა კათედრა

(შემოვიდა რედაქციაში 3.2.1941)

ZITIERTE LITERATUR—ციტირებული ლიტერატურა

1. I. N. Vécoua. Sur une représentation complexe de la solution générale des équations du problème stationnaire plan de la théorie de l'élasticité. (Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sciences de l'URSS, 1947. V. XVI, № 3).

[1] რამდენადაც ვიცით, ამ თეორემის მკაცრი დამტკიცება სხვა გზით მოითხოვს საკმარისად გრძელ მსჯელობას.