საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, ტ. II, № 1—2, 1941
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, Т. II, № 1—2, 1941
MITTEILUNGEN d. AKADEMIE d. WISS. d. GEORGISCHEN SSR, Bd. II, Nr. 1—2, 1941

MATHEMATIK

ÜBER HARMONISCHE UND METAHARMONISCHE FUNKTIONEN IM RAUM

Von ELIAS VECOUA

1. Betrachten wir im dreidimensionalen Raume ein Gebiet T von folgenden Eigenschaften: Es existiert in diesem Gebiet mindestens ein Punkt, der mit jedem Punkt des Gebietes durch eine gänzlich dem Gebiete angehörende geradlinige Strecke verbunden werden kann. Ein solches Gebiet nennen wir einen Stern und einen Punkt von obigen Eigenschaften den Mittelpunkt des Sterns. Im allgemeinen kann ein Stern offenbar unendlich viele Mittelpunkte haben, wie es z. B. bei einem konvexen Gebiet der Fall ist. Der Nullpunkt des Koordinatensystems möge im Mittelpunkt des Sternes liegen, und die sphärischen Koordinaten eines Raumpunktes seien r, φ, ϑ.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 1. *Es sei $\omega(r, \varphi, \vartheta)$ eine harmonische Funktion, die im Gebiete T regulär ist, höchstens bis auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, wo eine Singularität vom Typus $\frac{1}{r}$ vorliegen daf. Ferner sei*

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \omega(r, \varphi, \vartheta) + \int_0^r H(r, \rho, \lambda)\, \omega(\rho, \varphi, \vartheta)\, d\rho \tag{1}$$

mit

$$H(r, \rho, \lambda) = -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{\rho}{r-\rho}}\, J_1(\lambda\sqrt{r(r-\rho)}). \tag{2}$$

Dann ist die Funktion $u(r, \varphi, \vartheta)$ metaharmonisch, d. h. sie genügt der Gleichung

$$\Delta u + \lambda^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda^2 u = 0 \tag{3}$$

Ferner ist diese Funktion im ganzen Gebiet T regulär, höchstens bis auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, wo eine Singularität vom Typus $\frac{1}{r}$ vorliegen darf. Dabei ist jede im Gebiete T auf diese Art reguläre Funktion in der Gestalt (1), und zwar auf eine einzige Art, darstellbar.[1]

[1] Einen analogen Satz bewies ich in der Arbeit [1] für ein beliebiges einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet.

Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)+\lambda^2r^2H=0 \tag{4}$$

t. In der Tat, führt man die neuen Veränderlichen

$$\frac{r}{\rho}=\xi,\quad r\rho=\eta$$

in, so nimmt Gleichung (4) die Gestalt

$$\frac{\partial^2H}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\lambda^2}{4}H=0 \tag{5}$$

n und

$$H(r,\rho,\lambda)=-\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi-1}}J_1(\lambda\sqrt{\eta(\xi-1)})=-\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi-1}}J_1(x)$$

mit $x=\lambda\sqrt{\eta(\xi-1)}$.

Eine Differentiation ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial\xi}=\frac{\lambda}{4}\frac{J_1(x)}{(\xi-1)^{3/2}}-\frac{\lambda^2\sqrt{\eta}}{4(\xi-1)}J_1'(x),$$

$$\frac{\partial^2H}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\lambda^3}{8}\frac{J_1''(x)}{\sqrt{\xi-1}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (5) ein, so folgt

$$-\frac{\lambda^3}{8\sqrt{\xi-1}}\left[J_1''(x)+\frac{1}{x}J_1'(x)+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)J_1(x)\right]=0$$

was zu beweisen war.

Schreiben wir jetzt folgende Formeln auf, die leicht aus (2) erhalten werden können:

$$H(r,r,\lambda)=-\frac{\lambda^2r}{4},\ \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{\rho=r}=-\frac{\lambda^2}{8}+\frac{\lambda^4r^2}{32},$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)_{\rho=r}=-\frac{\lambda^2}{8}-\frac{\lambda^4r^2}{32}. \tag{6}$$

Differentiiert man beide Seiten von (1) nach r und wendet (6) an, so ergibt sich unschwer

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\lambda^2r}{4}\omega+\int_0^r\frac{\partial H}{\partial r}\omega(\rho,\varphi,\vartheta)\,d\rho.$$

Multipliziert man dies mit r^2 und differentiiert sodann nach r, so bekommt man, mit Hilfe der zweiten Formel (6),

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\frac{7}{8}\lambda^2r^2\omega+\frac{\lambda^4r^4}{32}\omega-\frac{\lambda^2r^3}{4}\frac{\partial\omega}{\partial r}$$
$$+\int_0^r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H}{\partial r}\right)\omega(\rho,\vartheta,\varphi)\,d\rho.$$

Mit Rücksicht auf (4), kann man die letzte Gleichung in die Form

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)-\frac{7}{8}\lambda^2r^2\omega+\frac{\lambda^4r^4}{32}\omega-\frac{\lambda^2r^3}{4}\frac{\partial\omega}{\partial r}$$

$$-\lambda^2r^2\int_0^r H(r,\rho,\lambda)\,\omega(\rho,\varphi,\vartheta)\,d\rho+\int_0^r\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)\omega(\rho,\varphi,\vartheta)\,d\rho \tag{7}$$

setzen. Partielle Integration ergibt, wegen (6),

$$\int_0^r\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)\omega(\rho,\varphi,\vartheta)\,d\rho=\frac{\lambda^2r^3}{4}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\lambda^2r^2}{8}\omega-\frac{\lambda^4r^4}{32}\omega$$

$$+\int_0^r H(r,\rho,\lambda)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)d\rho.$$

Setzt man dies in (7) ein, so folgt nach (1)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\lambda^2r^2u+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\int_0^r H(r,\rho,\lambda)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)d\rho. \tag{8}$$

Da der Laplacesche Operator in sphärischen Koordinaten die Gestalt

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta^* u$$

besitzt, wobei

$$\Delta^* u=\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right),$$

so folgt aus (8) unschwer

$$\Delta u+\lambda^2u=\Delta\omega+\frac{1}{r^2}\int_0^r H(r,\rho,\lambda)\,\rho^2\Delta\omega\,d\rho. \tag{9}$$

Diese Formel ist, wie man ohne Schwierigkeiten nachweisen kann, für jede Funktion ω gültig, die im Gebiete T regulär ist, höchstens bis auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, wo eine Singularität von Typus $\frac{1}{r}$ vorliegen darf.

Aus Formel (9) ergibt sich sofort unser Satz. In der Tat, für eine harmonische Funktion ω ist die rechte Seite von (9) identisch Null und daher u metaharmonische. Ist umgekehrt u eine metaharmonische Funktion, so lässt sich aus der Integralgleichung (1) vom Volterraschen Typus die Funktion ω

stets eindeutig bestimmen, die nach (9) im Gebiete T harmonisch ist. Man stellt unschwer fest, dass die Funktion ω eine Singularität von der Gestalt $\frac{1}{r}$ besitzt, sofern eine solche bei u vorhanden ist, und umgekehrt.

2. Es sei T eine Kugel mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems als Mittelpunkt. Bekanntlich lässt sich jede im Inneren der Kugel reguläre harmonische Funktion in die Reihe

$$\omega(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Y_m(\varphi, \vartheta) \tag{10}$$

entwickeln, wobei $Y_m(\varphi, \vartheta)$ die Laplacesche Funktion ist.

Setzt man (10) in (1) ein, so bekommt man, nach einer einfachen Rechnung,

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}(\lambda r)\, Y_m'(\varphi, \vartheta), \tag{11}$$

wobei

$$Y_m'(\varphi, \vartheta) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{m+1/2} \Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) Y_m(\varphi, \vartheta)$$

auch Laplacesche Funktionen bilden.

Auf diese Weise ergibt sich der folgende

Satz 2. *Eine beliebige metaharmonische Funktion, die innerhalb einer Kugel mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems als Mittelpunkt regulär ist, kann in eine Reihe der Gestalt* (11) *entwickelt werden*[1].

Setzt man in (1) für ω den Ausdruck $\frac{1}{r}$ ein, so bekommt man nach einer einfachen Rechnung die s. g. elementare Lösung

$$\frac{\cos \lambda r}{r}$$

der Gleichung (3).

Staatliche J. Stalin-Universität
Tbilissi

(Eingegangen am 3. Februar 1941.)

[1] Soviel ich weiss, erfordert ein strenger Beweis dieses Satzes mit anderen Hilfsmitteln ziemlich lange Betrachtungen.