სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის საქართველოს ფილიალის მოამბე, ტ. I № 5, 1940
СООБЩЕНИЯ ГРУЗИНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР, Т. I № 5, 1940
MITTEILUNGEN d. GEORGISCHEN ABTEILUNG d. AKADEMIE d. WISS. d. USSR, Bd. I Nr 5, 1940

MATHEMATIK

ALLGEMEINE DARSTELLUNG DER LÖSUNGEN ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN EINEM MEHRFACH ZUSAMMENHÄNGENDEN GEBIET

Von ELIAS VECOUA

In der vorliegenden Arbeit gebe ich, mit Hilfe analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die allgemeine Darstellung aller Lösungen der Gleichung

$$L(n) \equiv u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = 0 \tag{E_0}$$

in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet. Hierbei bedeuten a, b und c ganze Funktionen der Veränderlichen x und y. In den folgenden Artikeln werde ich Gleichungen eines allgemeineren Typus betrachten.

In meinen vorhergehenden Arbeiten [1, 2, 3] wurde gezeigt, dass jede reelle reguläre Lösung der Gl. (E_0), sofern es sich um ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet handelt, in der Gestalt

$$u(x, y) = R\left\{ \alpha(z, \bar{z})\,\varphi(z) + \int_{z_0}^{z} \beta(z, \bar{z};\, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta \right\}, \tag{1}$$

dargestellt werden kann. Hierbei sind $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$—im betrachteten Gebiet analytisch, $\alpha(z, \bar{z})$ und $\beta(z, \bar{z};\, \zeta)$ bezeichnen ganze Funktionen ihrer Argumente, die ausschliesslich von den Koeffizienten der Gl. (E_0) abhängen, z_0 ist ein fester Punkt des Gebietes, R bedeutet den Realteil.

Einer beliebigen Funktion $\varphi(z)$, die in einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch ist, entspricht mittels der Formel (1) eine reguläre Lösung der Gl. (E_0). Bedeutet C eine beliebige reelle Konstante, so entspricht hierbei den Funktionen $\varphi(z)$ und $\varphi(z) + iC$ eine und dieselbe Lösung.

Wir können daher den Imaginärteil von $\varphi(z)$ in irgend einem Punkte des Gebietes nach Belieben festsetzen. Im folgenden soll angenommen werden, dass

$$J\{\varphi(z_0)\} = 0 \tag{2}$$

ist, wobei J den Imaginärteil bezeichnet. Mittels der Formel (1) wird dann eine eineindeutige Beziehung zwischen den in einem endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet regulären Lösungen der Gl. (E_0) und in diesem Gebiet analytischen, durch (2) normierten Funktionen, hergestellt. Hierbei wird, in der Umgebung von z_0, die Funktion $\varphi(z)$ mit Hilfe von u bestimmt. Diese Beziehung wird durch

$$\varphi(z)=u(z,\bar{z}_0)+\int_{z_0}^{z}\bar{A}(\zeta,\bar{z}_0)\,u(\zeta,\bar{z}_0)\,d\zeta-\frac{1}{2}u(z_0,\bar{z}_0) \tag{3}$$

gegeben, wobei

$$\bar{A}(z,\bar{z})=\frac{1}{2}a\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)-\frac{i}{2}b\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

und $u(z,\bar{z})$ aus $u(x,y)$ entsteht, indem man x und y durch $\frac{z+\bar{z}}{2}$ und $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ ersetzt.

Bei einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet ergibt Formel (1) im allgemeinen mehrdeutige Lösungen der Gl. (E_0). Um eindeutige Lösungen zu erhalten muss man die im mehrfach zusammenhängenden Gebiet holomorphen Funktionen durch geeignet gewählte analytische Funktionen ersetzen, die einem bestimmten Mehrdeutigkeitstypus angehören.

Es sei T ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet mit dem Rande S. Der Einfacheit wegen wollen wir annehmen, dass S aus einer endlichen Anzahl einfacher, isolierter, geschlossener Kurven besteht: $S_0, S_1, \ldots, S_n$, wobei S_0 alle übrigen Kurven im Inneren enthält.

z_0 bedeute nach wie vor einen beliebigen, aber festen Punkt im Gebiet T. Dann kann eine beliebige Lösung der Gl. (E_0), die im Gebiet T regulär ist, in einer Umgebung des Punktes z_0 offenbar in der Gestalt (1) dargestellt werden, wobei $\varphi(z)$ durch (3) bestimmt ist.

Wir wollen jetzt den folgenden Satz beweisen: *Ist $u(z,\bar{z})$ eine in T reguläre Lösung der Gl.* (E_0), *so kann die durch* (3) *in einer Umgebung von z_0 definierte Funktion $\varphi(z)$ längs eines beliebigen Weges im Gebiete T analytisch fortgesetzt werden. Dabei führt diese Fortsetzung im allgemeinen zu einer in T mehrdeutigen Funktion der Gestalt*

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n}g_k(z)\lg(z-a_k)+f(z), \tag{4}$$

wobei die $g_k(z)$ ganze Funktionen sind, $f(z)$ eine in T holomorphe Funktion bedeutet und a_k ein beliebig festgelegter Punkt im Inneren der Kurve S_k ist.

Setzt man nämlich in (1) $\varphi(z)=\lg(z-z_0)$, so bekommt man eine s. g. *Elementarlösung* der Gl. (E_0)

$$\Omega(z,z_0)=\mathfrak{A}(z,\bar{z};z_0,\bar{z}_0)\lg\frac{1}{r}+\mathfrak{B}(z,\bar{z};z_0,\bar{z}_0).$$

Hierbei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze Funktionen ihrer Argumente, $r=|z-z_0|$. Ferner ist $\mathfrak{A}$ eine der Bedingung

$$\mathfrak{A}|_{z=z_0}=1$$

genügende Lösung der Gl. (E_0).

Mit Hilfe dieser Elementarlösung und einer entsprechenden Greenschen Integralidentität beweist man leicht, dass jede reguläre Lösung der Gl. (E_0), die in $T+S$ samt ihren ersten Ableitungen stetig ist, in der Gestalt

$$u(z,\bar{z})=\int_S \eta(z,\bar{z};\,s)\lg[(z-t)(\bar{z}-\bar{t})]\,ds+\int_S \nu(z,\bar{z};\,s)\frac{ds}{(z-t)(\bar{z}-\bar{t})},$$

darstellbar ist, wobei $\eta(z,\bar{z};\,s)$ und $\nu(z,\bar{z};\,s)$ ganze Funktionen der Veränderlichen z und $\bar{z}$ sind. Durch partielle Integration folgt hieraus

$$u(z,\bar{z})=\sum_{k=0}^{n}A_k(z,\bar{z})\lg[(z-t_k)(\bar{z}-\bar{t}_k)]+\int_S \gamma(z,\bar{z};\,s)\frac{1}{(z-t)(\bar{z}-\bar{t})}\,ds,$$

wobei die t_k feste Punkte auf den Randkurven S_k sind, $A_k(z,\bar{z})$ und $\gamma(z,\bar{z};\,s)$ ganze Funktionen von z und $\bar{z}$ bedeuten. Setzt man hier $\bar{z}=\bar{z}_0$, so folgt

$$u(z,\bar{z}_0)=\sum_{k=0}^{n}P_k(z)\lg(z-t_k)^{(1}+q(z),$$

wobei die $P_k(z)$ ganze Funktionen sind und $q(z)$ in T analytisch ist.

Wird dieser Ausdruck in (3) eingesetzt, so bekommt man ohne Schwierigkeit (4), womit unser Satz bewiesen ist.

Auf diese Weise ist festgestellt, dass die in (1) auftretenden Funktionen $\varphi(z)$ die Gestalt (4) besitzen müssen, wenn eindeutige Lösungen der Gl. (E_0) erhalten werden sollen. Offenbar gibt aber eine beliebige Fuuktion (4) noch keine eindeutige Lösung der Gl. (E_0).

Setzt man in der Tat Funktionen der Gestalt (4) in (1) ein, indem der Bequemlichkeit wegen $g_k(z)$ durch $\frac{1}{2\pi i}g_k(z)$ ersetzt wird, so folgt

$$u(z,\bar{z})=R\left\{\alpha(z,\bar{z})f(z)+\int_{C_z}\beta(z,\bar{z};\,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}R\left\{\frac{1}{2\pi i}\alpha(z,\bar{z})g_k(z)\lg(z-a_k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z}\beta(z,\bar{z};\,\zeta)g_k(\zeta)\lg(\zeta-a_k)d\zeta\right\}, \quad (5)$$

(1 Hier kann jeder Zweig des Logarithmus genommen werden, falls nur die Logarithmen konjugierter Zahlen zueinander konjugiert sind.

wobei C_z ein bestimmter Integrationsweg ist, der die Punkte z_0, z verbindet und ganz innerhalb T liegt.

Partielle Integration ergibt

$$u(z, \bar{z}) = R\left\{\alpha(z, \bar{z}) f(z) + \int_{C_z} \beta(z, \bar{z}; \zeta) f(\zeta)\, d\zeta\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{n} R\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\alpha(z, \bar{z}) g_k(z) + \int_{a_k}^{z} \beta(z, \bar{z}; \zeta) g_k(\zeta)\, d\zeta\right] \lg (z - a_k)\right\} + V(z, \bar{z}), \quad (5)$$

wobei $V(z, \bar{z})$ eine ganze Funktion von z und $\bar{z}$ bedeutet.

Beschreibt nun z in T eine geschlossene Kurve, die nur S_k enthält, so bekommt offenbar $u(z, \bar{z})$ einen Zuwachs

$$u_k(z, \bar{z}) = R\left\{\int_{S_k} \beta(z, \bar{z}; \zeta) f(\zeta)\, d\zeta\right\} + R\left\{\alpha(z, \bar{z}) g_k(z) + \int_{a_k}^{z} \beta(z, \bar{z}; \zeta) g_k(\zeta)\, d\zeta\right\},$$

der im allgemeinen nicht gleich Null ist.

Für die Eindeutigkeit der durch (5) bestimmten Funktion ist somit notwendig und hinreichend, dass alle $u_k(z, \bar{z}) = 0$ sind, d. h. dass

$$w_k(z, \bar{z}) = -R\left\{\int_{S_k} \beta(z, \bar{z}; \zeta) f(\xi)\, d\zeta\right\} = R\left\{\alpha(z, \bar{z}) g_k(z) + \int_{a_k}^{z} \beta(z, \bar{z}; \zeta) g_k(\zeta)\, d\zeta\right\}.$$

Da aber, wie man unschwer erkennen kann, die beiden Seiten dieser Gleichungen ganze Funktionen von z und $\bar{z}$ sind, die der Gl. (E_0) genügen, so folgt, auf Grund von (1) und (3) leicht

$$g_k(z) = w_k(z, \bar{a}_k) + \int_{a_k}^{z} \bar{A}(\zeta, \bar{a}_k)\, w_k(\zeta, \bar{a}_k)\, d\zeta - \frac{1}{2} w_k(a_k, \bar{a}_k). \quad (6)$$

Wir haben somit den folgenden Satz:

Jede reguläre (eindeutige) Lösung der Gl. (E_0) *im mehrfach zusammenhängenden Gebiet ist in der Gestalt* (1) *darstellbar, sofern*

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} g_k(z) \lg (z - a_k), \quad (7)$$

wobei $f(z)$ eine im Gebiet T holomorphe Funktion ist, die $g_k(z)$ ganze Funktionen sind, die mit $f(z)$ durch (6) *verknüpft werden, und a_k einen beliebigen Punkt innerhalb S_k bedeutet.*

Man kann noch auf eine andere Weise mit Hilfe der Formel (1) eindeutige Lösungen der Gl. (E_0) im mehrfach zusammenhängeden Gebiet konstruieren.

Es sei $f(z)$ irgend eine in T holomorphe Funktion. Die Funktion

$$u(x, y)=R\left\{\alpha(z, \bar{z})f(z)+\int_{C_s}\beta(z, \bar{z}; \zeta)f(\zeta)\,d\zeta\right\}$$

ist im allgemeinen eine innerhalb T mehrdeutige Lösung der Cl. (E_0). Beschreibt z einmal die Randkurve S_k im positiven Sinne, so ist der Zuwachs dieser Funktion

$$\omega_k(x, y)=R\left\{\int_{S_k}\beta(z, \bar{z}; \zeta)f(\zeta)d\zeta\right\}$$

eine ganze Funktion von z und $\bar{z}$

Es sei

$$\vartheta_k(x, y)=\frac{1}{2\pi}\arg(z-a_k),$$

wobei a_k nach wie vor ein beliebig festgelegter Punkt innerhalb S_k ist. Beschreibt z die Kurve S_k einmal, so erleidet die Funktion $\omega_k(x, y)\,\vartheta_k(x, y)$ auch den Zuwachs $\omega_k(x, y)$.

Bestimmen wir jetzt die eindeutige Funktion $v(x, y)$ so, dass die Funktion

$$v(x, y)-\sum_{k=1}^{n}\omega_k(x, y)\,\vartheta_k(x, y)$$

eine Lösung der Gl. (E_0) ist. Wie man unschwer sieht, muss der Gleichung

$$L(v)=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(2\frac{\partial\omega_k}{\partial x}+a\omega_k\right)\frac{\partial\vartheta_k}{\partial x}+\left(2\frac{\partial\omega_k}{\partial y}+b\omega_k\right)\frac{\partial\vartheta_k}{\partial y}\right]$$
$$\equiv F(x, y)$$

genügen. Man sieht leicht, dass die Funktion $F(x, y)$ im Gebiete T regulär ist. Eine Partikularlösung dieser Gleichung ist

$$v(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_T F(\xi, \eta)\,\Omega(\xi, \eta; x, y)\,d\xi d\eta.$$

Die Funktion

$$w(x, y)=R\left\{\alpha(z, \bar{z}) f(z)+\int_{C_z} \beta(z, \bar{z};\ \zeta) f(\zeta)\, d\zeta\right\}-\sum_{k=1}^{n} \omega_k(x, y)\, \vartheta_k(x, y)+v(x, y)$$

ist dann eine im Gebiete T eindeutige Lösung der Gl. (E_0), wobei $f(z)$ eine beliebige, in T holomorphe Funktion sein kann.

Georgische Abteilung
d. Akad. d. Wiss. d. USSR
Mathematisches Institut
Tbilissi

(Eingegangen am 20. April 1940)

მათემატიკა

ილია ვეკუა

ელიფსურ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნების ზოგადი წარმოდგენა მრავალბმულ არეში

რეზუმე

წინამდებარე შრომაში შევისწავლით (E_0) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნების ზოგად წარმოდგენას მრავალბმულ არეების შემთხვევაში. განტოლების კოეფიციენტები: a, b და c მთელი ფუნქციებია x და y ცვლადების.

წინა შრომებში [1, 2, 3] ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (E_0) განტოლების ყოველი რეგულარული ამოხსნა მარტივად ბმულ არეში წარმოიდგინება (1) ფორმულით, სადაც $\alpha(z, \bar{z})$, $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$ მთელი ფუნქციებია თავიანთი არგუმენტების, რომელნიც გამოისახებიან განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით, $\varphi(z)$ ნებისმიერი ჰოლომორფული ფუნქციაა განსახილავ არეში, z_0 ფიქსირებული წერტილია იმავე არეში, ხოლო R —ნამდვილი ნაწილის ნიშანი.

მრავალბმულ არის შემთხვევაში აღნიშნული წარმოდგენა საზოგადოდ გვაძლევს მრავალსახა ამოხსნებს (E_0) განტოლების, თუ წინანდებურად ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციაა.

ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ (1) ფორმულა მოგვცემს (E_0) განტოლების ყველა რეგულარულ (ცალსახა) ამოხსნას მრავალბმულ არის შემთხვევაშიაც, თუ $\varphi(z)$ იქნება მრავალსახა ფუნქცია (4) სახის, სადაც $f(z)$ ნებისმიერი ჰოლომორფული ფუნქციაა, $g_k(z)$—მთელი ფუნქცია, განსაზღვრული ცალსახად $f(z)$-ის

საშუალებით (6) ფორმულით, S_k ჩაკეტილი კონტურებია, რომელნიც არეს შემოსაზღვრავენ, ხოლო a_k—ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილი S_k კონტურის შიგნით.

სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის
საქართველოს ფილიალი
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ZITIERTE LITERATUR—ციტირებული ლიტერატურა

1. I. Vècoua. Sur la représentation générale etc., Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS. 1937, V. XVII, № 6, p. 295—299.

2. И. Н. Векуа. Комплексное представление решений эллиптических диф. ур-ий и т. д Труды Тбилисского Матем. Ин-та, VII, 1940, стр. 161—253.

3. И. Н. Векуа. Граничные задачи теории линейных эллиптических диф. ур-ий и т. д. Сообщения Грузинского Филиала АН СССР, т. I, № 1, 1940, стр. 29—34.