ი. პ. კვირიკაძე

გრაფიკული სტატიკა

«ტექნიკა და შრომა»
1950

ო. პ. კვირიკაძე

გრაფიკული სტატიკა

საქართველოს სსრ სახელმწიფო ტექნიკური გამომცემლობა
„ტექნიკა და შრომა“

19 თბილისი 50

რ ე დ ა ქ ტ ო რ ი ს ა გ ა ნ

ინჟინერ ო. პ. კვირიკაძის მიერ შედგენილი შრომა „გრაფიკული სტატიკა" აკმაყოფილებს ტექნიკუმებისათვის განკუთვნილ საპროგრამო მასალას. იგი დიდ დახმარებას გაუწევს ტექნიკური სასწავლებლის სტუდენტებსა და ამ საკითხით დაინტერესებულ ფართო წრეებსაც.

აღსანიშნავია, რომ ამ სახით ქართულ ენაზე ჯერ არაფერი გამოცემულა; მასში ყოველი საკითხის განხილვას თან ახლავს საილუსტრაციო მაგალითები, რაც წიგნის გამოყენების სფეროს კიდევ უფრო ადიდებს. ერთის მხრივ, თეორიული მექანიკის ავტორები ერიდებოდნენ ამ საკითხის მთლიანად გაშუქებას იმ თვალსაზრისით, რომ იგი განმარტებული იქნებოდა მასალათა გამძლეობის ან ნაშენთა სტატიკის სახელმძღვანელოებში, მეორეს მხრივ, კი—მასალათა გამძლეობის ან ნაშენთა სტატიკის ავტორები, წიგნის გადატვირთვის თავიდან აცილების მიზნით, თითქმის მთლიანად არ იხილავდნენ ამ ფრიად საჭირო ნაწილს. დღეს ეს ნაკლი გამოსწორებულია.

ახალგაზრდა ავტორის აღნიშნული შრომა სხარტად და მოკლედ აშუქებს მასში მოცემულ ყოველ საკითხს, რაც მისასალმებელია.

რედაქტორი: სსრ მეცნ. აკადემიის
წევრი-კორესპონდენტი, პროფ. **გ. მ. მუხაძე**

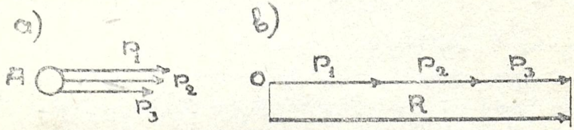
შ ე ს ა ვ ა ლ ი

გრაფიკული სტატიკის მიზანია ამა თუ იმ ამოცანის გრაფიკულად ამოხსნა, სტატიკის თეორემების, პრინციპების და აქსიომების გამოყენებით. გრაფიკულ სტატიკას, ანალიზურ ამოხსნასთან შედარებით, ზოგჯერ აქვს ბევრი უპირატესობა, რომელთაგანაც უმთავრესია რთული ფიგურებისათვის ამა თუ იმ საკითხის ამოსახსნელად დახარჯული მცირე დრო და ნახაზზე დაშვებული შეცდომების დროულად აღმოჩენა. გრაფიკულ სტატიკას იყენებენ არა მარტო ჩვენ მიერ ქვემომოყვანილი საკითხებისა და ამოცანების ამოხსნასა და გადაწყვეტაში, არამედ მას დიდი გამოყენება აქვს უმაღლესი მათემატიკისა და ტექნიკის სხვადასხვა საკითხებში, რომლის უპირატესობას წარმოადგენს ამოხსნათა და გადაწყვეტათა სიმარტივე. ამოხსნის შედეგის სიზუსტე დამოკიდებულია ნახაზების დაკვირვებით შესრულებაზე და ის აკმაყოფილებს იმ მოთხოვნილებებს, რაც გათვალისწინებულია საინჟინრო საქმეში სიზუსტის მხრივ.

გრაფიკულ სტატიკაში უმთავრესად საქმე გვექნება ძალის ცნებასთან. ძალა კი არის ნივთიერ სხეულთა ძრაობის ან წონასწორობის განმსაზღვრელი ელემენტი, რომელიც ხასიათდება სიდიდით, მიმართულებით და მოდების წერტილით, ე. ი. ვ ე ქ ტ ო რ ი თ. ძალის ტექნიკურ საზომ ერთეულად მიღებულია: გრამი, კილოგრამი და ტონა, რომლებიდანაც ყველაზე გავრცელებულია კილოგრამი (კგ). თუ სხეულზე ამა თუ იმ სახით მოქმედებს ძალა, რომლის სიდიდე ცნობილია, მაშინ მისი გამოსახვა ქაღალდზე ყოველთვის შეიძლება მიმართულების გათვალისწინებით ნებისმიერი მასშტაბით. მაგალითად, თუ მივიღებთ 1 სმ=100 კგ, მაშინ სხეულზე მოქმედი $P=500$ კგ ძალა გამოისახება 5 სმ სიგრძის ვექტორით, რომლის მიმართულება იქნება ძალის მოქმედების მიმართულება.

§ 1. ძალთა შეკრება

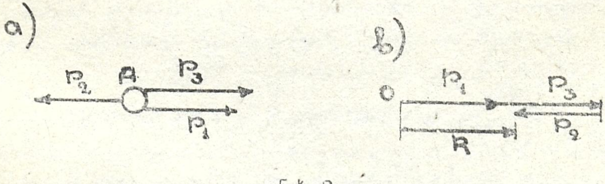
1) წერტილზე მოქმედ ძალებს აქვთ ერთი და იგივე მიმართულება. ვთქვათ, A წერტილზე მოქმედებს P_1, P_2, P_3 ძალები (ნახ. 1, a). მათი შეკრებისათვის ავირჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი, გავავლოთ ძალების პარალელური სწორი და მასზე ნებისმიერი მიმდევრობით გადავზომოთ ძალები (ნახ. 1, b). როგორც ნახაზიდან ჩანს, მოქმედი P_1, P_2 და



ნახ. 1.

P_3 ძალების ტოლქმედი არის R, რომელიც სიდიდით უდრის მოქმედი ძალების სიდიდეთა არითმეტიკულ ჯამს და მიმართულია იმავე მხარეს.

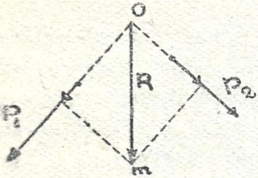
2) წერტილზე მოქმედ ძალებს აქვს სხვადასხვა მიმართულება. ვთქვათ, A წერტილზე მოქმედებს P_1, P_2, P_3 ძალები, რომელთაგან P_1 და P_3-ს აქვს ერთნაირი მიმართულება, P_2-ს კი მოპირდაპირე (ნახ. 2, a). მოვიქცევით ისე, როგორც ზემოგანხილულ შემთხვევაში. ნებისმიერად აღებულ O წერტილზე გავლებულ სწორზე ცალკე გადავზომავთ ერთი და იმავე მიმართულების ძალების სიდიდეებს (მაგალი-



ნახ. 2.

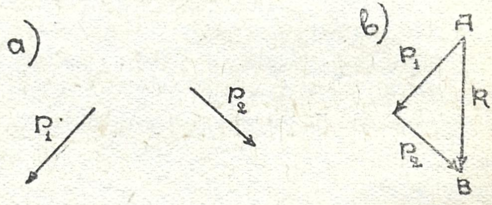
თად O წერტილის მარჯვნივ P_1 და P_3, ხოლო P_3 ძალის ბოლოდან მარცხნივ—P_2) და უდიდეს ჯამს გამოვაკლებთ უმცირესს. მიღებული $\overline{P_1}+\overline{P_3}-\overline{P_2}$ სხვაობა სიდიდით ტოლი იქნება R ტოლქმედის, მიმართული უდიდესი შესაკრებიანი ძალების მიმართულებით (ნახ. 2, b).

3) *ორი ძალის შეკრება, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთებიან.* მოცემულია P_1 და P_2 ძალები, რომლებისთვისაც საჭიროა ტოლქმედის პოვნა (ნახ. 3). ამისათვის გავაგრძელოთ ისინი ერთმანეთის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის O წერტილიდან (ნახ. 3) მოვზომოთ P_1 და P_2 ძალების ტოლი სიდიდეები. მივიღებთ ერთ წერტილში თავმოყრილ ორ ძალას. P_1 ძალის ბოლოდან გავავლოთ P_2 ძალის პარალელური ხაზი, P_2 ძალის ბოლოდან კი P_1 ძალის პარალელური. მათი გადაკვეთის m წერტილს თუ შევუერთებთ O წერტილს, მივიღებთ პარალელოგრამის დიაგონალს, რომელიც იქნება P_1 და P_2 ძალების ტოლქმედი მიმართული O წერტილიდან m წერტილისაკენ. მივიღეთ, რომ ერთ წერტილში თავმოყრილი ორი ძალის ტოლქმედი მათზე აგებული *პარალელოგრამის დიაგონალის ტოლია.*



ნახ. 3.

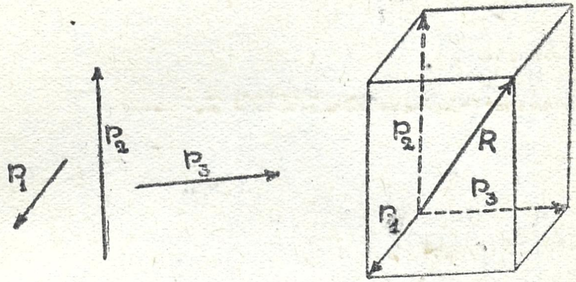
ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეგვიძლია სხვა ხერხითაც, სახელდობრ, *ძალთა სამკუთხედის* აგებით. ამისათვის, ავირჩიოთ ნებისმიერი A წერტილი (ნახ. 4, b), გავავლოთ მასზე P_1 ძალის პარალელური ხაზი და მოვზომოთ P_1 ძალის ტოლი მონაკვეთი. ამ მონაკვეთის ბოლოდან გავავლოთ P_2 ძალის პარალელური ხაზი და მოვზომოთ P_2 ძალის ტოლი მონაკვეთი. A წერტილის B წერტილთან შეერთებით მივიღებთ AB მონაკვეთს, რომელიც გამოსახავს R ტოლქმედს. 4, b ნახაზზე წარმოდგენილ ფიგურას *ძალთა სამკუთხედი* ეწოდება. როგორც ნახაზიდან ჩანს, R ტოლქმედი არის ძალთა სამკუთხედის ჩამკეტი და როცა ის უდრის ნულს, მაშინ ძალები ურთიერთ წონასწორდებიან და სხეული წონასწორობაშია.



ნახ. 4.

ძალთა სამკუთხედის აგებისას ჯერ ჩვენ გადავზომეთ P_1 ძალა, შემდეგ კი P_2, მაგრამ შედეგი არ შეიცვლებოდა თუ ძალების გადაზომვას ჩავატარებდით ნებისმიერი რიგით.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ, თუ სივრცეში სამი ძალა გვაქვს, მათი გეომეტრიული ჯამი იმ პარალელეპიპედის დიაგონალით (R) გამოისახება ნახ. 4c), რომლის წიბოები (გვერდები) მოცემული P_1, P_2, P_3 ძალები (ვექტორები) იქნება.

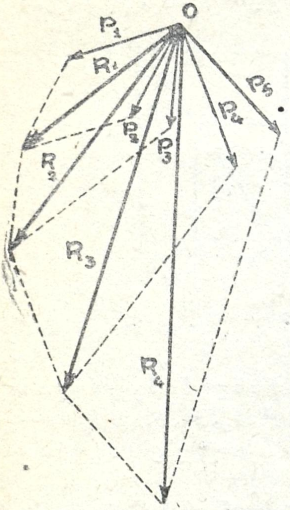


ნახ. 4c.

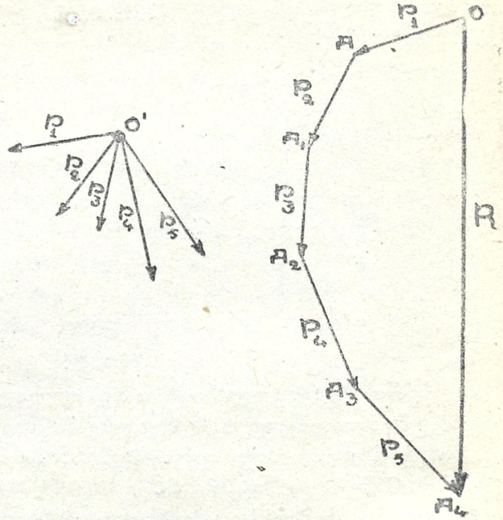
4) *ერთ წერტილში თავმოყრილ რამდენიმე ძალის შეკრება.* დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედებს P_1, P_2, P_3, P_4 და P_5 ძალთა სისტემა, რომლებიც იკვეთებიან (ან მათი მიმართულებების გაგრძელებები) O წერტილში (ნახ. 5).

ტოლქმედი R ძალის საპოვნელად ვიქცევით ასეთნაირად: P_1 და P_2 ძალებისათვის განხილული წესით (პარალელოგრამის) ვიპოვით R_1 ტოლქმედს, P_3 და R_1 ტოლქმედის მიხედვით R_2 ტოლქმედს და ა. შ. P_5 და R_3 ძალების მიხედვით R_4 ტოლქმედს, რომელიც ტოლფასი იქნება მოქმედი ძალების ტოლქმედის (ნახ. 5). ამ წესით ტოლქმედის პოვნა შედარებით რთულია, რადგან ნახაზი ბუნდოვანი ხდება, განსაკუთრებით დიდი რიცხვი ძალების შემთხვევაში, და მოითხოვს დიდ დროს. ამიტომ ტოლქმედის მოძებნისათვის ვიქცევით შემდეგნაირად: ნებისმიერად აღებულ O წერტილიდან გავავლოთ P_1 ძალის გეომეტრიულად ტოლი $\overline{OA}$ ვექტორი, A წერტილიდან—P_2 ძალის გეომეტრიულად ტოლი $\overline{AA_1}$ ვექტორი და . . . . A_3 წერტილიდან—P_5 ძალის გეომეტრიულად ტოლი $\overline{A_3A_4}$ ვექტორი (ნახ. 6). თუ A_4 წერტილს შევაერთებთ O წერტილთან, მივიღებთ მოქმედი ძალების R ტოლქმედს, რომელიც დამოუკიდებელი იქნება ძალთა გადაზომვის რიგისაგან. მე-6 ნახაზზე წარმოდგენილ ფიგურას ეწოდება *ძალთა მრავალკუთხედი*. რო-

გორც მე-6 ნახაზიდან ჩანს, ძალთა მრავალკუთხედის აგება შედარებით ადვილია და მოითხოვს ნაკლებ დროს, ვიდრე მე-5 ნახაზზე წარმოდგენილი აგება. ამგვარად, რამდენიმე ძალის ტოლქმედი ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტის $\overline{OA_4}=R$ ვექტორის ტოლია. იმ შემთხვევაში, როდესაც



ნახ. 5.



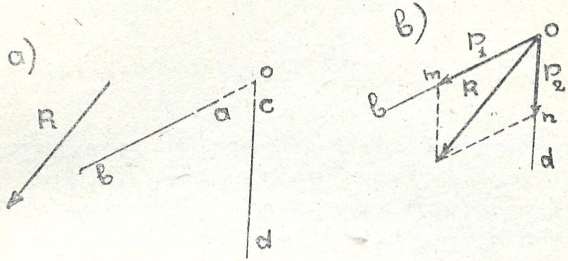
ნახ. 6.

ძალთა მრავალკუთხედის ჩამკეტი R უდრის ნულს, მაშინ სხეულზე მოქმედი ძალები ურთიერთ წონასწორდებიან და სხეული წონასწორობაშია.

§ 2. ძალების დაშლა და გაწონასწორება

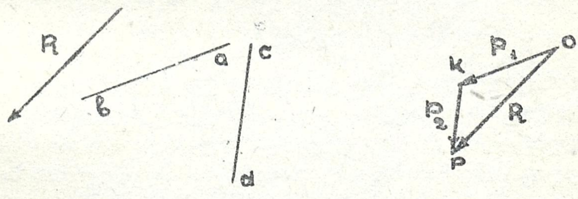
1) ძალის დაშლა ორ მიმართულებაზე. მოცემულია R ძალა, დავშალოთ ის ab და cd მიმართულებებზე, რომლებიც (ან მათი გაგრძელებანი) O წერტილში იკვეთებიან (ნახ. 7, a). დაშლა ვაწარმოოთ პარალელოგრამის წესით. მიმართულებების გადაკვეთის O წერტილზე გადავიტანოთ R ვექტორი და მასზე ავაგოთ, ab და cd მიმართულებების გათვალისწინებით პარალელოგრამი, რისთვისაც O წერტილიდან და შემდეგ R-ის ბოლო წერტილიდან გავატაროთ ჯერ ab და შემდეგ cd სხივების პარალელური სწორები. მივიღებთ პარალელოგრამს, რომლის $Om=P_1$ და $On=P_2$ ძალები წარმოადგენენ R ძალის მდგენელებს

ab და *cd* მიმართულებებზე (ნახ. 7, *b*). იგივე შედეგს მივიღებდით, თუ *R* ძალას დავტოვებდით უძრავად და მის საწყის და ბოლო წერტ ილებზე გავავლებდით *ab* და *cd* სხივების პარალელურ სწორებს, რომლებიც შეადგენდა იგივე პარალელოგრამს იგივე მდგენლებით. აგრეთვე, შედეგი არ შეიცვლებოდა, თუ ავაგებდით ძალთა სამკუთხედს განხილული წესით, სახელდობრ, *R* ვექტორის საწყისი წერტილიდან გავავ-



ნახ. 7.

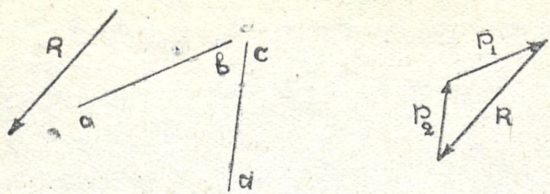
ლებდით *ab* სხივის პარალელურს, ხოლო მისი ბოლოდან *cd* სხივის პარალელურს (ნახ. 8). $OK=P_1$ და $Kp=P_2$ მდგენლების სიდიდეები იგივე იქნებოდა, რაც პარალელოგრამის წესით აგების შემთხვევაში.



ნახ. 8.

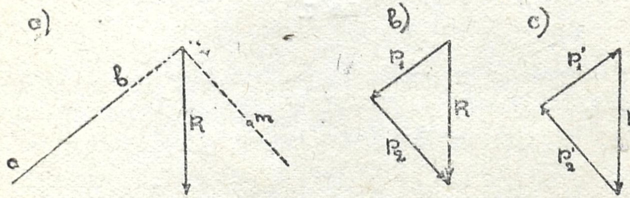
R ძალის გამაწონასწორებელი ძალების პოვნა *ab* და *cd* მიმართულებებზე, რომლებიც O წერტილში იკვეთებიან, წარმოებს ისევე, როგორც ძალის დაშლის შემთხვევაში, კერძოდ, ძალთა სამკუთხედის აგებით იმ განსხვავებით, რომ გამაწონასწორებელ P_1 და P_2 ძალებს უნდა ქონდეს *R* მიმართულება (ნახ. 9), ე. ი. სამივე ძალას ერთი და იგივე მიმართულება.

2) ძალის დაშლა ერთი მიმართულებით და მოცემული წერტილით. მოცემულია R ძალა, ab მიმართულება და m წერტილი



ნახ. 9.

(ნახ. 10, a). დავშალოთ R ძალა ab მიმართულებით და m წერტილის გათვალისწინებით. წინა პარაგრაფის განხილვის დროს მივიღეთ, რომ ორი ძალის ტოლქმედი გადიოდა მათი გადაკვეთის წერტილზე ან სამივე ძალა იკვეთებოდა ერთ წერტილში. ამის თანახმად, გავაგრძელოთ ab მიმარ-



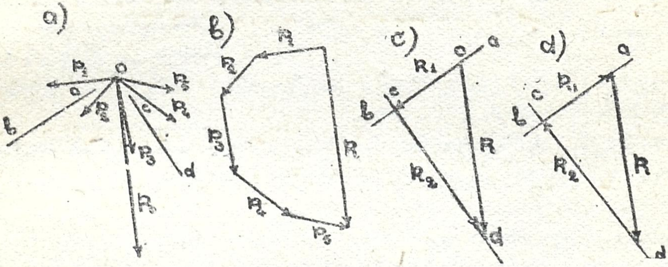
ნახ. 10.

თულება და R ტოლქმედი მათ გადაკვეთამდე რომელიმე n წერტილში. მეორე მიმართულებას მივიღებთ თუ n წერტილს შევუერთებთ m წერტილს. მივიღებთ, რომ R ძალა უნდა დაიშალოს na და mn მიმართულებებზე, რომელიც წინა შემთხვევაზე დაიყვანება. მდგენელების სიდიდეების გამოსარკვევად ავაგებთ ძალთა სამკუთხედს ცნობილი წესით (ნახ. 10, b). წონასწორობისათვის კი საჭიროა ძალთა სამკუთხედის გვერდებს ჰქონდეს R მიმართულება (ნახ. 10, c);

ე. ი. სიბრტყეზე მდებარე სამი ძალის წონასწორობისათვის საჭიროა, რომ სამივე ძალა ერთ წერტილზე გადიოდეს, რომელიც იქედანაც გამომდინარეობს, რომ სამი ძალიდან ორი მათგანი მესამე ძალით უნდა წონასწორობდეს, ან, რაც იგივეა, ამ ორი ძალის ტოლქმედის

მიმართულების მოწინააღმდეგე იყოს; მაშასადამე, მან ამ ორი ძალის გადაკვეთის წერტილზე უნდა გაიაროს.

3) ერთ წერტილში თავმოყრილ რამდენიმე ძალის დაშლა და გაწონასწორება ორი მიმართულებით, რომლებიც იმავე წერტილში იკვეთებიან. მოცემულია P_1, P_2, P_3, P_4 და P_5 ძალები, რომლებიც იკვეთებიან (ან მათი მიმართულების გაგრძელება) O წერტილში (ნახ. 11, *a*). საჭიროა აღნიშნული ძალების დაშლა და გაწონასწორება *ab* და *cd* მიმართულებებზე, რომლებიც იმავე O წერტილში იკვეთებიან.



ნახ. 11.

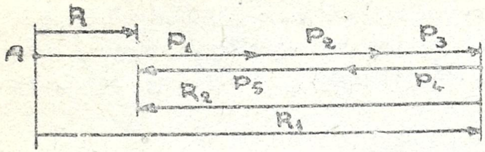
ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ მათი *R* ტოლქმედი, სახელდობრ, ძალთა მრავალკუთხედის აგებით (ნახ. 11, *b*). *R* ტოლქმედის პოვნის შემდეგ, ამოცანა დაიყვანება ერთი *R* ძალის დაშლაზე, მოცემულ *ab* და *cd* მიმართულებებზე ისე, როგორც ეს განხილული გვქონდა წინა შემთხვევაში. *R* ძალის დაშლა მოყვანილია 11, *c* ნახაზზე, რომელზედაც აღნიშნულია მისი მდგენელები R_1 და R_2-თი. წონასწორობისათვის კი საჭიროა R_1 და R_2 მდგენელები და *R* ტოლქმედი ქმნიდნენ ჩაკეტილ სამკუთხედს (ნახ. 11, *d*).

§ 3. ამოცანები ძალების შეკრებაზე და დაშლაზე

ამოცანა 1. *A* წერტილზე მოდებულია ერთი მიმართულებით $P_1 = 3{,}2$ კგ, $P_2 = 1{,}8$ კგ, $P_3 = 1{,}5$ კგ, ხოლო მეორე მიმართულებით $P_4 = 2$ კგ და $P_5 = 3$ კგ ძალები. საჭიროა ვიპოვოთ ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება.

ამოხსნა. შევარჩიოთ ნებისმიერი მასშტაბი. ვთქვათ, 1 სმ — 1 კგ და *A* წერტილზე გავლებულ სწორ ხაზზე გადავზომოთ მოცემული ძალები სიდიდეთა და მიმართულებათა გათვალისწინებით (ნახ. 12). რო-

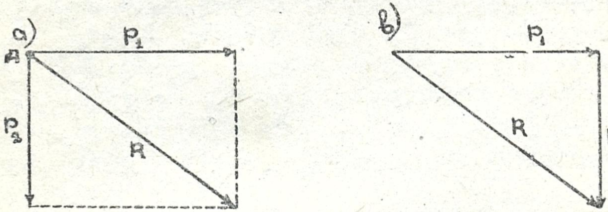
გორც აგებიდან ჩანს, ჯერ ავაგეთ ერთ მხრივ მიმართული P_1, P_2, P_3 ძალების ტოლქმედი, რომელიც ტოლი იქნება $R_1=3,2+1,8+1,5=6,5$ კგ და მიმართული იმავე მხარეს, ხოლო მის ბოლოდან ავაგეთ P_4 და P_5 ძალების R_2 ტოლქმედი, რომელიც ტოლია $R_2=2+3=5$ კგ, მიმართული P_4 და P_5 ძალების მიმართულებით. ნახაზიდან ვღებულობთ, რომ სიდიდით $R=R_1-R_2=6,5-5=1,5$ კგ და მიმართულია უდიდესი ძალის R_1-საკენ. R-ით აღნიშნულია ყველა ძალის ტოლქმედი. ნახაზიდანაც ჩანს, რომ მასშტაბის მხედველობაში მიღებით, $R=1,5$ კგ.



ნახ. 12.

ამოცანა 2. A წერტილზე მოქმედებს ორი ურთიერთპერპენდიკულარული $P_1=3$ კგ და $P_2=2,25$ კგ ძალები. ვიპოვოთ მათი ტოლქმედი (ნახ. 13, a).

ამოხსნა. შევარჩიოთ ნებისმიერი მასშტაბი, ვთქვათ, 1 სმ—1 კგ, და ნებისმიერად შერჩეულ A წერტილზე მოვდოთ P_1 და P_2 ძალები. როგორც ვიცით, ასეთ შემთხვევაში ტოლქმედი ტოლია მათზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალის (ნახ. 13, a). მასშტაბის გათვალისწინებით

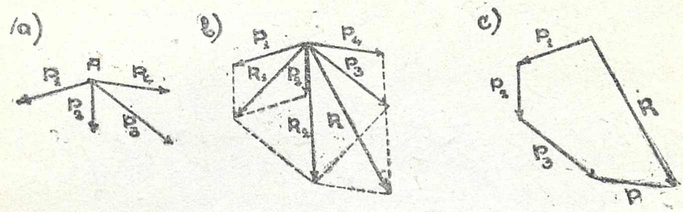


ნახ. 13.

მივიღებთ, რომ ტოლქმედი $R=3,8$ კგ. ტოლქმედის სიდიდე და მისი მიმართულება შეიძლებოდა გვეპოვა აგრეთვე ძალთა სამკუთხედის აგებით (ნახ. 13, b), რომლის ჩამკეტი R ტოლი იქნებოდა პარალელოგრამის დიაგონალის (ნახ. 13, a), მიმართულება კი ნახაზზე ნაჩვენები მიმარულების.

ამოცანა 3. A წერტილზე მოქმედებს $P_1=1,15$ კგ, $P_2=0,8$ კგ, $P_3=1,5$ კგ, და $P_4=1,2$ კგ ძალები,რომელთა მიმართულებანი მოცემულია მე-14, a ნახაზზე. ვიპოვოთ მათი ტოლქმედი. მასშტაბად მივიღოთ 1 სმ—1 კგ.

ამოხსნა. ამოცანა შეგვიძლია ამოვხსნათ ორი ხერხით: 1. მიმდევრობით პარალელოგრამთა აგების და 2. ძალთა მრავალკუთხედის აგების ხერხებით. პირველი ხერხით ამოხსნა ჩატარებულია მე-14, *b* ნახაზზე, ხოლო მეორე ხერხით კი მე-14, *c* ნახაზზე, რომლებზედაც ტოლქმედი ძალის

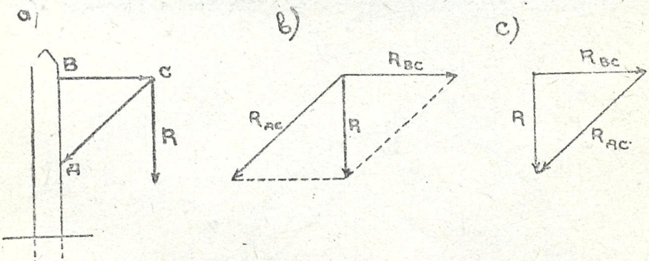


ნახ. 14.

სიდიდე აღნიშნულია R-ით. აღნიშნული მასშტაბის გამოყენებით ვიპოვით (როგორც მე-14, *b*, ისე მე-14, *c* ნახაზებიდან), რომ $R=2{,}5$ კგ.

ამოცანა 4. სვეტის B წერტილში დამაგრებულია ჰორიზონტალური BC ღერო, ხოლო A წერტილში—დახრილი AC ღერო, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია C სახსრით. C სახსარზე მოქმედებს $R=1{,}5$ ტ ძალა (ნახ. 15, *a*). ვიპოვოთ ძალების სიდიდეები ღეროებში. მასშტაბად მივიღოთ 1 სმ-ში 1 ტონა.

ამოხსნა. აქ საქმე გვექნება მოცემული R ძალის მდგენელ ძალებად დაშლასთან. R_{BC} და R_{AC} (ნახ. 15, *b*) წარმოადგენს BC და AC ღერო-

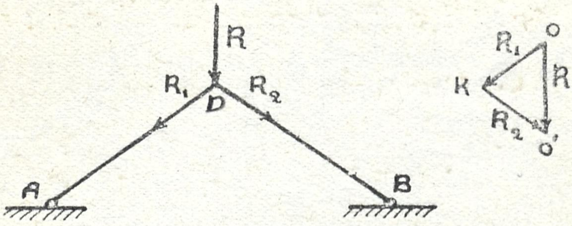


ნახ. 15.

ებში ძალებს, რომლებიც შერჩეული მასშტაბით უდრის 1,65 ტ და 2,2 ტ. მათი განსაზღვრა შეგვეძლო აგრეთვე ძალთა სამკუთხედის აგებითაც (ნახ. 15, *c*).

ამოცანა 5. ორი დახრილი ღეროს შეერთების D წერტილზე მოქმედებს $R=2{,}5$ ტ ძალა. განვსაზღვროთ ძალვები AD და BD ღეროებში ნახ. 16, *a*).

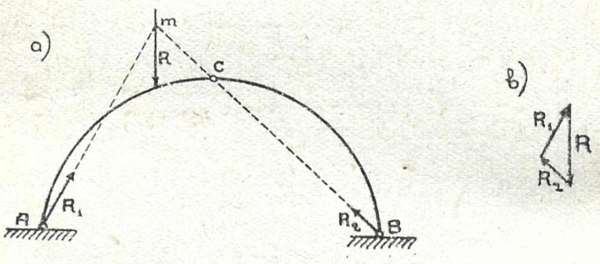
ამოხსნა. მივიღოთ ძალთა მასშტაბად 1 სმ—2 ტ. შევარჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი, მოვდოთ მასზე R ძალა და ცნობილი წესით დავშალოთ AD და BD მიმართულებებზე. მივიღებთ ძალთა სამკუთხედს (ნახ. 16, *b*), რომლის $OK=R_1=2{,}2$ ტ და $KO'=R_2=2{,}2$ ტ წარმოადგენენ AD და BD ღეროებში ძალვების სიდიდეებს, რომელთა მიმართულებანი განისაზღვრებიან იმავე ძალთა სამკუთხედიდან.



ნახ. 16.

ამოცანა 6. სამსახსრიან ACB კამარაზე მოქმედებს R ძალა (ნახ. 17, *a*). განვსაზღვროთ A და B საყრდენი რეაქციები.

ამოხსნა. კამარა შედგება ორი ცალკეული ნაწილისაგან, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია C სახსრით. გამოვყოთ CB ნაწილი.



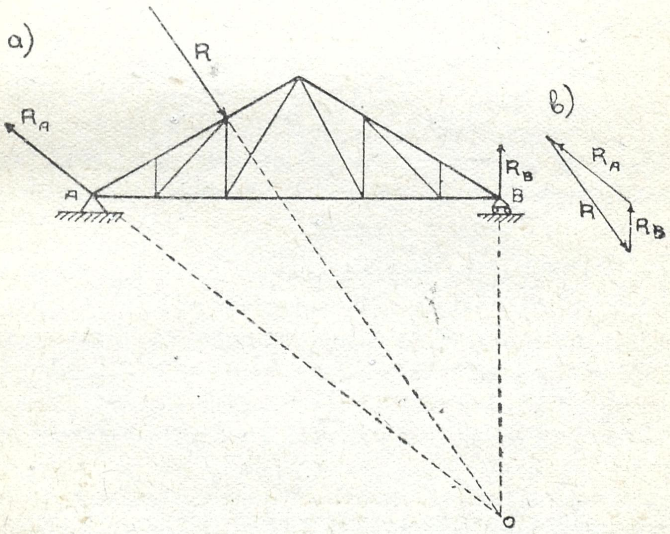
ნახ. 17.

მაშინ მასზე იმოქმედებს (C სახსარზე) კამარის მარცხენა ნაწილი, ხოლო B წერტილში R ძალისაგან გამოწვეული R_2 რეაქცია. წონასწორობის

პირობის თანახმად, ეს ძალები უნდა მდებარეობდეს BC სწორზე. ამ მდგომარეობით განისაზღვრება R_2 რეაქციის მიმართულება. რადგან სიბრტყეზე მდებარე სამი ძალის წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ სამივე ძალა ერთ წერტილში იკვეთებოდეს, ამიტომ R_1 რეაქციამ, რომელმაც უნდა გააწონასწოროს R და R_2 ძალები, უნდა გაიაროს მათი გადაკვეთის m წერტილზე. R_1 და R_2 რეაქციების სიდიდეებისა და მიმართულებების საპოვნელად R ძალა უნდა დავშალოთ Am და Bm მიმართულებებზე ან mB მიმართულებაზე და A წერტილის გათვალისწინებით ისე, როგორც ზემოთ გვქონდა განხილული. ძალთა სამკუთხედი აგებულია მე-17, b ნახაზზე, რომლიდანაც ვიპოვით R_1 და R_2 რეაქციების სიდიდეებსა და მიმართულებებს.

ამოცანა 7. A ბოლოთი სახსროვნად დამაგრებული და B ბოლოთი თავისუფლად მდებარე ფერმა განიცდის R ძალის მოქმედებას (ნახ. 18, a) განვსაზღვროთ R_A და R_B საყრდენი რეაქციები.

ამოხსნა. მარჯვენა B საყრდენის თავისუფლად მდებარეობის გამო R_B რეაქცია მიმართული იქნება ვერტიკალურად, ხოლო მარცხენა საყრ-

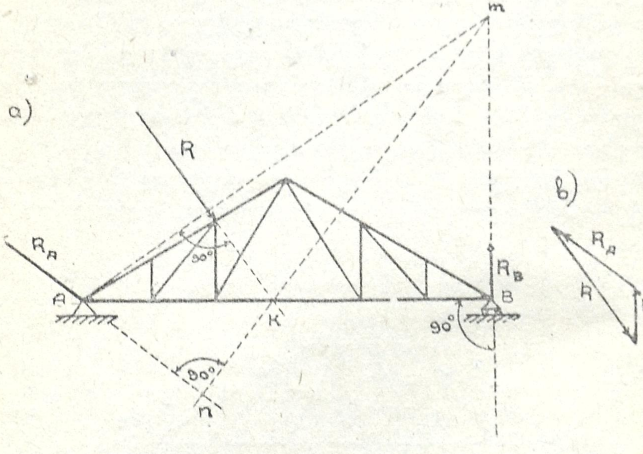


ნახ. 18.

დენი R_A რეაქციის მიმართულებას მოგვცემს (წონასწორობის პირობის გათვალისწინებით) მოცემული R ძალისა და R_B რეაქციის გადაკვეთის O წერტილზე და A საყრდენზე გამავალი სწორი. R_A და R_B რეაქციების სი-

დიდეები და მიმართულებანი განისაზღვრებიან ძალთა სამკუთხედიდან (ნახ. 18, *b*), რომელიც აიგება მოცემული R ძალის OA და OB მიმართულებებზე დაშლის შედეგად.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემული R ძალისა და R_B რეაქციის გადაკვეთის O წერტილს ვერ ვღებულობთ ნახაზის ფარგლებში, მაშინ R_A რეაქციის მიმართულების განსაზღვრა წარმოებს შემდეგნაირად: A საყრდენიდან გავიყვანთ მოცემული R ძალისადმი პერპენდიკულარულ სწორს R_B რეაქციის მიმართულების გადაკვეთამდე (m წერტილი). m წერტილი-



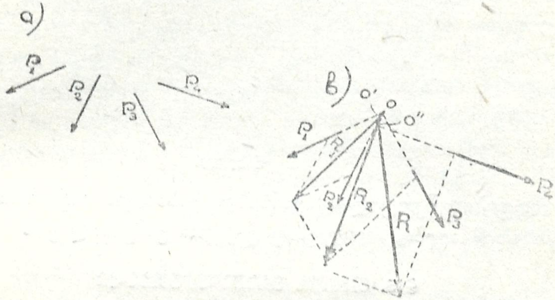
ნახ. 18′.

დან გავიყვანთ სწორს ისე, რომ მან გაიაროს R ძალის გაგრძელებისა და A საყრდენიდან R_B რეაქციის მიმართულებაზე დაშვებული პერპენდიკულარის გადაკვეთის K წერტილზე. გავაგრძელებთ Km სწორს და მისდამი ავმართავთ პერპენდიკულარს ისე, რომ მან გაიაროს A წერტილზე (ნახ. 18′, *a*). nA სწორი განსაზღვრავს R_A რეაქციის მიმართულებას. R_A და R_B რეაქციების სიდიდეების მოსაძებნად კი ავაგებთ ძალთა სამკუთხედს (ნახ. 18′, *b*).

§ 4. ერთ წერტილში არათანამკვეთი ძალების შეკრება

ვთქვათ, მოცემულია P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალები, რომლებიც არ იკვეთებიან (ან მათი გაგრძელებანი) ერთ წერტილში. საჭიროა ვიპოვოთ მათი ტოლქმედი (ნახ. 19, *a*). განვიხილოთ ორი წესი:

I. ძალების მიმდევრობითი შეკრების პარალელოგრამის წესი. ეს წესი შემდეგში მდგომარეობს: ჯერ განვიხილავთ P_1 და P_2 ძალებს, გავაგრძელებთ მათ, და გადაკვეთის O წერტილიდან მოვზომავთ P_1 და P_2 ძალების ტოლ სიდიდეებს—ვექტორებს. მათზე ცნობილი წესით ავაგებთ პარალელოგრამს, რომლის დიაგონალი (R_1) იქნება მათი ტოლქმედი. შემდეგ, R_1 და P_3 ძალებისთვისაც პარალელოგრამის აგებით ვიპოვით (R_2) ტოლქმედს ან, რაც იგივეა, P_1, P_2 და P_3 ძალების



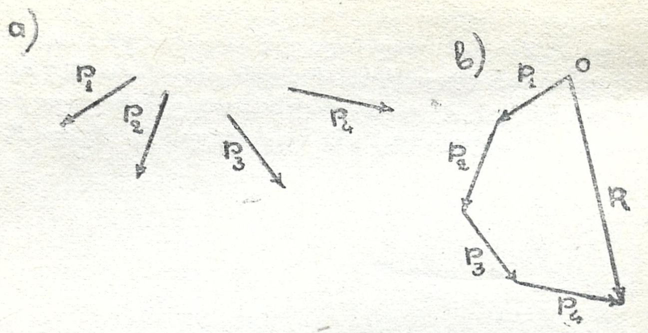
ნახ. 19.

ტოლქმედს. საბოლოოდ ვიპოვით R_2 და P_4 ძალების R_3 ტოლქმედს, რომელიც ტოლფასი იქნება P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალების ტოლქმედისა (ნახ. 19, *b*).

II. ძალთა მრავალკუთხედის აგების წესი. განვიხილოთ იგივე P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალები, რომლებიც არ იკვეთებიან ერთ წერტილში (ნახ. 20, *a*).

ავირჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი (ნახ. 20, *b*) და მასზე გავატაროთ P_1 ძალის პარალელური სწორი. მოვზომოთ მასზე P_1 ძალის ტოლი სიდიდის ვექტორი და მისი ბოლოდან გავავლოთ P_2 ძალის პარალელური სწორი. ამ სწორზე მოვზომოთ P_2 ძალის ტოლი სიდიდის ვექტორი და მისი ბოლოდან გავავლოთ P_3 ძალის პარალელური სწორი და ა. შ., თუ უკანასკნელი P_4 ძალის გამომსახველი ვექტორის ბოლო წერტილს შევუერთებთ O წერტილს, მივიღებთ P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალების R ტოლქმედს (ნახ. 20, *b*), რომელიც ტოლი იქნება 19, *b* ნახაზზე აგებული R ტოლქმედის. მე-20, *b* ნახაზზე წარმოდგენილ ფიგურას ეწოდება ძალთა მრავალკუთხედი. ძალთა მრავალკუთხედიდან განსაზღვრული R ტოლქმედის სიდიდე არ შეიცვლება, თუ ნებისმიერი რიგით გადავზომავთ მოცემულ

ძალებს. 20, *b* ნახაზის აგებით განვსაზღვრეთ R ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება, მაგრამ მოცემულ ძალთა სისტემაზე მისი მოქმედების

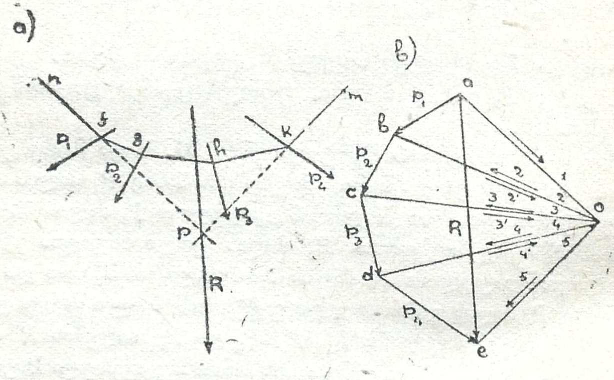


ნახ. 20.

ხაზის (მოდების წერტილის) განსაზღვრისათვის საჭიროა ე. წ. თოკის მრავალკუთხედის აგება, რომელსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

§ 5. თოკის მრავალკუთხედი

ვთქვათ, მოცემულია ერთ წერტილში არათანამკვეთი P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალთა სისტემა (ნახ. 21, *a*). საჭიროა ვიპოვოთ მათი R ტოლქმედის სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი.



ნახ. 21.

როგორც ვიცით, ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ამ ძალებზე აგებულ ძალთა *abcdea* მრავალკუთხედიდან (ნახ. 21, *b*).

მოდების წერტილის განსაზღვრისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი O წერტილი, რომელსაც პ ო ლ უ ს ი ეწოდება და შევაერთოთ ის a, b, c, d, e წერტილებთან სწორი ხაზებით. Oa, Ob, Oc, Od და Oe ხაზებს ეწოდება ს ხ ი ვ ე ბ ი. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად 1, 2, 3, 4, 5 რიცხვებით (ნახ. 21, b). 21, a ნახაზზე ავიღოთ ნებისმიერი n წერტილი და გავატაროთ მასზე 1 სხივის პარალელური სწორი P_1 ძალის f წერტილში გადაკვეთამდე. f წერტილიდან გავავლოთ მე-2 სხივის პარალელური სწორი P_2 ძალის g წერტილში გადაკვეთამდე და ა. შ. მე-4 სხივის პარალელურად გავლებულ სწორი ხაზის P_4 ძალის გადაკვეთის k წერტილიდან—მე-5 სხივის პარალელური. მივიღებთ $nfghkm$ მრავალკუთხედს, რომელსაც თ ო კ ი ს მ რ ა ვ ა ლ კ უ თ ხ ე დ ი ეწოდება. ამ უკანასკნელიდან განისაზღვრება ტოლქმედის მოქმედების ხაზის (მოდების წერტილის) მდებარეობა, თუ მისი კიდურა nf და mk გვერდების გაგრძელების გადაკვეთის p წერტილზე გავავლებთ ძალთა მრავალკუთხედის (ნახ. 21, b) აგების შედეგად მიღებული R ტოლქმედის პარალელურ სწორს.

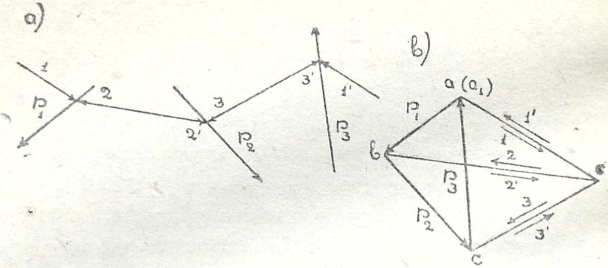
ამნაირად, მივიღეთ, რომ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით განისაზღვრება მოცემულ ძალთა სისტემისათვის ტ ო ლ ქ მ ე დ ი ს სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი.

დავამტკიცოთ, რომ R ტოლქმედი მართლაც p წერტილში გაივლის. ამისათვის P_1 ძალა დავშალოთ ორ nf და fg მიმართულებებზე, რომლის შესაბამისი ძალთა სამკუთხედია Oab (ნახ. 21, b) და მდგენელები 1 და 2. ასევე, P_2 ძალა დაიშლება $2'$ და 3 მდგენელებად fg და gh მიმართულებებზე, P_2—$3'$ და 4 მდგენელებად gh და hk მიმართულებებზე, ხოლო P_4—$4'$ და 5 მდგენელებად hk და km მიმართულებებზე. ამნაირად, მოცემული ძალთა სისტემა P_1, P_2, P_3 და P_4 შეიძლება შევცვალოთ მისი ეკვივალენტური 1, 2, $2'$, 3, $3'$, 4, $4'$, 5 ძალთა სისტემით, რომელშიაც 2 და $2'$, 3 და $3'$, 4 და $4'$ წყვილ-წყვილად წონასწორდებიან, რის გამო, 1 და 5 ძალები გვრჩება, რომელთა R ტოლქმედი Oae სამკუთხედიდან განისაზღვრება და რომელიც ამ ძალების გადაკვეთის წერტილზე, ე. ი. თ ო კ ი ს მ რ ა ვ ა ლ კ უ თ ხ ე დ ი ს კ ი დ უ რ ა გ ვ ე რ დ ე ბ ი ს გ ა დ ა კ ვ ე თ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ზ ე გაივლის, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

§ 6. თოკის მრავალკუთხედის თვისებები

1. იმისათვის, რომ ესა თუ ის სხეული მასზე მოქმედი ძალთა სისტემისაგან წონასწორობაში იყოს, აუცილებელია, მაგრამ არასაკმარისი, ტოლქმედის ნულთან ტოლობა ან, რაც იგივეა, ძ ა ლ თ ა მ რ ა ვ ა ლ კ უ თ ხ ე დ ი ს ჩ ა კ ე ტ ვ ა. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია P, P_2, P_3 ძალთა სისტემა

(ნახ. 22, a), რომლისთვისაც აგებული ძალთა მრავალკუთხედი ჩაკეტილი
(ნახ. 22, b). განხილული წესით ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი. ძალთ

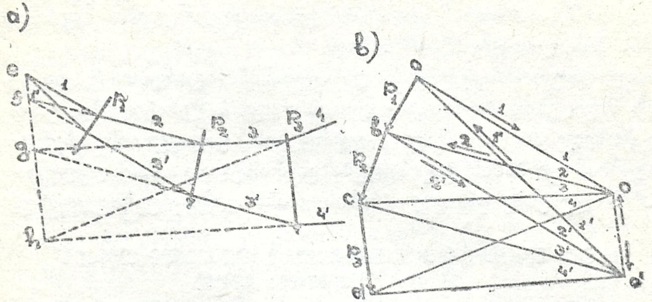


ნახ. 22.

მრავალკუთხედის აგებისას შევნიშნავთ, რომ უკანასკნელი ძალის (a_1) ბო-
ლო დაემთხვევა პირველი ძალის დასაწყისის a წერტილს, რის გამო
Oa_1 სხივი გაყვება Oa სხივს. ეს შესაძლებელია მაშინ, როდესაც თოკი
მრავალკუთხედის კიდურა გვერდები ან ურთიერთპარალელურია ან ერთ
სწორ ხაზზე მდებარეობენ. უკანასკნელ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ თოკი
მრავალკუთხედი ჩაკეტილია. თუ ძალების დაშლას ვაწარმოებთ ისე
როგორც მე-5 პარაგრაფში, მაშინ მოცემული ძალთა სისტემა ორ—1 და 1
ძალაზე დაიყვანება (ნახ. 22, a). როგორც 22, b ნახაზიდან ჩანს, ეს ძალებ
ტოლია, მიმართულებით კი მოპირდაპირე, ამიტომ, თუ დავუშვებთ, რომ
თოკის მრავალკუთხედის ნაპირა გვერდები პარალელურებია, მაშინ მოცე
მული ძალთა სისტემა დაიყვანება წყვილ ძალაზე, ხოლო თუ ისინი შე
თავსდებიან ერთ სწორ ხაზზე, მაშინ ვიტყვით, რომ ძალთა სისტემ
წონასწორობაშია. მივიღეთ, რომ სხეულზე მოქმედი ძალთა სისტემი
წონასწორობისათვის აუცილებელია ძალთა და თოკის მრავალკუთხედებ
ჩაკეტვა, და თუ ჩაკეტილია მხოლოდ ძალთა მრავალკუთხედი, მაში
ძალთა მოცემული სისტემა რაღაც მომენტით დაიყვანება წყვილ ძალაზე
2. ყოველი ძალთა სისტემისათვის პოლუსის ნებისმიერად შერჩევით
შეგვიძლია უამრავი თოკის მრავალკუთხედის აგება. ადვილია იმის ჩვენე
ბა, რომ ამა თუ იმ თოკის მრავალკუთხედების კიდურა გვერდების გაგრძე
ლებანი გადიკვეთებიან ერთ სწორ ხაზზე—სახელდობრ, ტოლ
ქმედზე და ხასიათდებიან შემდეგი თვისებით: მოცემული ძალთ
სისტემისათვის თუ ავაგებთ ორი თოკის მრავალკუთ
ხედს და ვიპოვით სათანადო გვერდების გადაკვეთი

წერტილებს, მაშინ ისინი დალაგდებიან პოლუსების შემაერთებელი ხაზის პარალელურ სწორზე (ნახ. 23, *a*).

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ სისტემა შემდგარი P_1, P_2, P_3 ძალებისაგან, რომლებიც არ იკვეთებიან ერთ წერტილში (ნახ. 23, *a*). შევარჩიოთ ნებისმიერი O და O′ პოლუსები და შევაერთოთ ნებისმიერი *a* წერ-



ნახ. 23.

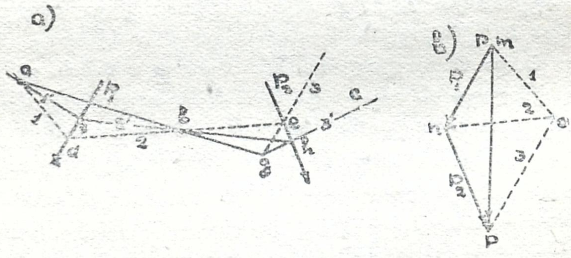
ტილიდან გადაზომილი მოცემული ძალების საწყისი და ბოლო წერტილები. მივიღებთ O*abcd*O და O′*abcd*O′ მრავალკუთხედებს (ნახ. 23, *b*), რომელთა საშუალებით ავაგებთ თოკის მრავალკუთხედებს (ნახ. 23, *a*). მიღებული ორი მრავალკუთხედის შესაბამისი გვერდების გაგრძელების გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ *e*, *f*, *g* და *h* ასოებით. უნდა დავამტკიცოთ, რომ *e*, *f*, *g* და *h* წერტილები მდებარეობენ ერთ სწორზე, რომელიც პარალელურია O და O′ წერტილების შემაერთებელი ხაზის. განვიხილოთ P_1 ძალა და დავშალოთ ის ორ—1 და მე-2 მიმართულებებზე (ნახ. 23, *a*), რომლის მდგენელების სიდიდე განისაზღვრება *ab*O ძალთა სამკუთხედიდან. იგივე P_1 ძალა გავაწონასწოროთ 1′ და 2′ მიმართულებებზე *ab*O′ ძალთა სამკუთხედის გათვალისწინებით (ნახ. 23, *b*). უკუვაგდოთ P_1 ძალა, მაშინ დაგვრჩება 1, 2, 1′ და 2′ ურთიერთ გამაწონასწორებელი ძალები, რომელთაგანაც O*a* და O′*a* სხივებზე მდებარე 1 და 1′ ძალებისათვის და O*b* და O′*b* სხივებზე მდებარე 2 და 2′ ძალებისათვის ცალ-ცალკე ვიპოვოთ ტოლქმედი ძალები. 1 და1′ ძალების ტოლქმედი მე-2 პარაგრაფის თანახმად მოდებული უნდა იყოს *e* წერტილზე, რომელიც O*a*O′ ძალთა სამკუთხედიდან ტოლია OO′ მონაკვეთის და მიმართულია მდგენელების მიმართულებების საწინააღმდეგოდ, ე. ი, O′-კენ—O-მდე (ნახ, 23, *b*). 2 და 2′ ძალების ტოლქმედი მოდებული იქნება თოკის მრავალკუთხედის შესაბამისი

გვერდების გადაკვეთის f წერტილზე, რომელიც ObO' ძალთა სამკუთხე-დიდან ტოლი იქნება OO' მონაკვეთის და მიმართული მდგენელების მიმარ-თულების საწინააღმდეგოდ O-დან — O'-კენ. მივიღეთ, რომ e და f წერტი-ლებზე მოდებულია OO' მონაკვეთის ტოლი ძალები, რომლებიც ერთმანე-თისადმი მიმართულია მოპირდაპირე მხარეს. წონასწორობისათვის კი საჭიროა, რომ 1, 1' და 2 და 2' ძალების ტოლქმედები მდებარეობდნენ OO' ხაზის პარალელურ სწორ ხაზზე.

თუ ანალოგიურ მსჯელობას და აგებას ჩავატარებთ P_2 და P_3 ძალე-ბისათვის მივიღებთ, რომ გადაკვეთის g და h წერტილები, ე. ი. თოკის მრავალკუთხედების სათანადო გვერდების გადაკვეთის წერტილებიც, მოთავსდებიან ef ხაზის გაგრძელებაზე, რომელიც პარალელური იქნება O და O' პოლუსებზე გამავალი ხაზის, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

§ 7. მოცემულ სამ წერტილზე გამავალი თოკის მრავალკუთხედის აგება

ამოცანა ამოვხსნათ ორი P_1 და P_2 ძალისათვის, რომლებიც მოცე-მულ a, b და c წერტილებს შორის მდებარეობენ. ამოცანის ამოხსნა დამ-ფუძნებულია § 6-ში განხილულ მე-2 თვისებაზე, რომლისთვისაც წინასწარ უნდა ავაგოთ დამხმარე თოკის მრავალკუთხედი. აგება ჩავატაროთ შემდეგ-ნაირად: P_1 ძალაზე ავიღოთ ნებისმიერი d წერტილი და გავატაროთ თოკის მრავალკუთხედის ad და db გვერდები (ნახ. 24, a). ამის შემდეგ



ნახ. 24.

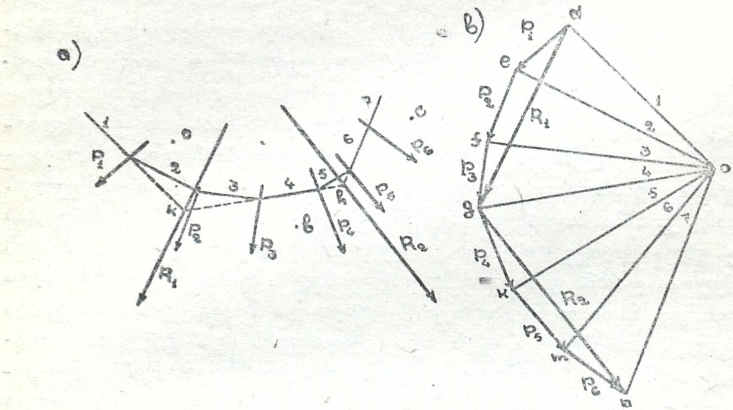
ცნობილი წესით ავაგოთ P_1 და P_2 ძალებისათვის mnp ძალთა სამკუთხედი (ნახ. 24, b). აღნიშნული ნახაზის m წერტილიდან გავავლოთ ad სწორის პარალელური ხაზი, ხოლო n წერტილიდან — db-ს პარალელური, რომელთა გადაკვეთა მოგვცემს O პოლუსის მდებარეობას. მესამე სხივს მივიღებთ, თუ p წერტილს შევაერთებთ O წერტილთან. მიღებული Op სხივით განი-

საზღვრება თოკის მრავალკუთხედის მესამე გვერდის მდებარეობა, რისთვისაც e წერტილიდან გავატაროთ Op სხივის პარალელური ხაზი (ნახ. 24, a). როგორც თოკის მრავალკუთხედის აგებიდან ჩანს (რადგან პირველი გვერდი ავილეთ ნებისმიერად), მხოლოდ მისმა ორმა 1 და მე-2 გვერდმა გაიარა მოცემულ a და b წერტილებზე. იმისათვის, რომ მესამე გვერდმაც გაიაროს მოცემულ c წერტილზე, ამისათვის აგებული თოკის მრავალკუთხედი (1, მე-2 და მე-3 გვერდებით) მივიღოთ, როგორც დამხმარე და ავაგოთ საძიებელი თოკის მრავალკუთხედი, რომლის გვერდებმა უნდა გაიაროს მოცემულ წერტილებზე. მაგრამ, საძიებელი თოკის მრავალკუთხედის ორმა გვერდმაც a და b წერტილებზე უნდა გაიარონ. ამგვარად, a და b წერტილები წარმოადგენენ დამხმარე თოკის მრავალკუთხედის და საძიებელი თოკის მრავალკუთხედის შესაბამისი გვერდების გადაკვეთის წერტილებს, ე. ი. ab სწორზე გადიკვეთებიან თოკის მრავალკუთხედების შესაბამისი გვერდების გაგრძელებათა ორ-ორი წყვილი. მაშასადამე, § 6-ში მოყვანილი მეორე თვისების საფუძველზე, იმავე ab სწორზე უნდა გადიკვეთოს მესამე გვერდების გაგრძელებებიც. ამიტომ გავაგრძელოთ დამხმარე თოკის მრავალკუთხედის მე-3 გვერდი ab სწორის გადაკვეთამდე. მათი გადაკვეთის g წერტილი და მოცემული c წერტილი განსაზღვრავს საძიებელი თოკის მრავალკუთხედის მე-3′ გვერდის მდებარეობას (ნახ. 24, a). საძიებელი თოკის მრავალკუთხედის მე-2′ გვერდმა უნდა გაიაროს მე-3′ სხივისა და P_2 ძალის გადაკვეთის h და მოცემულ b წერტილებზე, რომელიც P_1 ძალას გადაკვეთს q წერტილში. q წერტილიდან გატარებული სწორი ხაზი, რომელმაც უნდა გაიაროს a წერტილზე, განსაზღვრავს საძიებელი თოკის მრავალკუთხედის 1′ გვერდს. ამნაირად, მივიღეთ, რომ ყველა მოცემული a, b და c წერტილები მდებარეობენ ჩვენ მიერ აგებული თოკის მრავალკუთხედის 1′, 2′ და 3′ გვერდებზე.

ამოცანის გადაწყვეტა, რომელიც ჩვენ ჩავატარეთ ორი P_1 და P_2 ძალის შემთხვევაში, შეიძლება განვაზოგადოთ რამდენიმე ძალის შემთხვევაშიაც. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 და P_6 ძალთა სისტემა და a, b, c წერტილები, რომლებზედაც უნდა აიგოს თოკის მრავალკუთხედი (ნახ. 25, a).

ამისათვის P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 და P_6 ძალები დავყოთ ორ ჯგუფად ისე, რომ პირველი ჯგუფის ძალების ტოლქმედმა გაიაროს a და b წერტილებს შორის, ხოლო მეორე ჯგუფის ტოლქმედმა b და c წერტილებს შორის. P_1, P_2 და P_3 ძალები მივაკუთვნოთ პირველ ჯგუფს, ხოლო P_4, P_5 და P_6 ძალები კი მეორე ჯგუფს, რომელთა ტოლქმედის სიდიდეებს და მიმართულებებს განვსაზღვრავთ ძალთა მრავალკუთხედის აგებით (ნახ.

25, b), ხოლო მოდების წერტილების მდებარეობას თოკის მრავალკუთხედით (ნახ. 25, b). P_1, P_2 და P_3 ძალების ტოლქმედი ტოლი იქნება $defgd$ ძალთა მრავალკუთხედის dg ჩამკეტის ან R_1 ვექტორის, ხოლო P_4, P_5 და P_6 ძალების ტოლქმედი კი $gkmng$ ძალთა მრავალკუთხედის gn ჩამკეტის ან R_2 ვექტორის. R_1 ტოლქმედის მოდების წერტილი განისაზღვრება 1 და მე-4 გვერდების გაგრძელებების გადაკვეთის k წერტილით, ხოლო R_2 ტოლქმედის, მე-4 და მე-7 გვერდების გადაკვეთის h წერტილით. ამნაი-



ნახ. 25.

რად მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანება ეკვივალენტურ ორ R_1 და R_2 ძალებზე, რომლებიც მოცემულ a, b და c წერტილებს შორის გადიან. ეს კი ანალოგიურია ზემოგანხილული შემთხვევის, რისთვისაც თოკის მრავალკუთხედს ავაგებთ განხილული წესით.

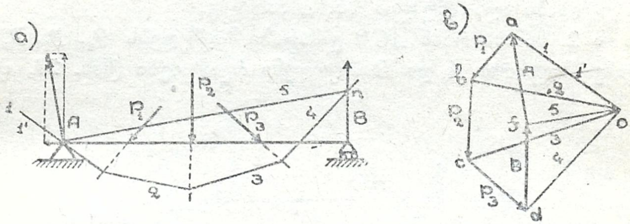
§ 8. ამოცანები

ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით ამოვხსნათ ამოცანები.

ამოცანა 1. მოცემულია ერთი ბოლოთი სახსროვნად დამაგრებული და მეორე ბოლოთი თავისუფლად მდებარე ჰორიზონტალური კოჭი, რომელიც დატვირთულია ნებისმიერი P_1, P_2 და P_3 ძალებით (ნახ. 26, a). განვსაზღვროთ საყრდენი რეაქციები.

ამოხსნა. როგორც ცნობილია, ასეთი დატვირთვის დროს უძრავი A საყრდენის რეაქცია მიმართული იქნება დახრილად, ხოლო მოძრავი B საყრდენის რეაქცია ყოველთვის პერპენდიკულარული იქნება მოძრაობის

მიმართულების. მოცემული კოჭი წონასწორობაშია P_1, P_2, P_3 ძალებით და A და B საყრდენი რეაქციებით. მაგრამ ჩვენი დამტკიცების თანახმად (იხ. § 6) წონასწორობისათვის საჭიროა ძალთა მრავალკუთხედის და თოკის მრავალკუთხედის ჩაკეტვა. ძალთა მრავალკუთხედი კი შეგვიძლია ავაგოთ მხოლოდ მოცემული P_1, P_2 და P_3 ძალებით (ნახ. 26, b). რადგან B რეაქციის მიმართულება ცნობილია, ამიტომ P_3 ძალის ბოლო d წერტილიდან გავავლოთ მისდამი პარალელური ხაზი, რომელზედაც ჯერ-ჯერობით უცნობი იქნება B რეაქციის სიდიდე. ავიღოთ ნებისმიერი

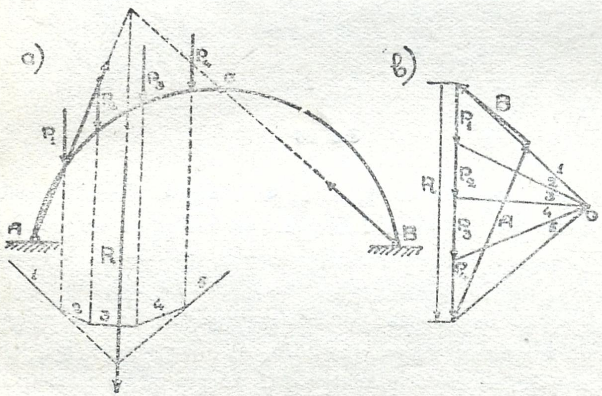


ნახ. 26

O პოლუსი და გავატაროთ 1, 2, 3, 4 სხივები. წონასწორობისთვის, როგორც ცნობილია, საჭიროა 1 სხივისა და ჩამკეტის ბოლო წერტილიდან გატარებული $1'$ სხივის ერთმანეთისადმი დამთხვევა. ამგვარად, ჩვენ გვრჩება ერთი სხივის განსაზღვრა, რომლის საშუალებით მივიღებთ A და B რეაქციების სიდიდეებს და მიმართულებებს. მის საპოვნელად ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი (ნახ. 26, a). მოცემული დატვირთვების მიხედვით (ზოგიერთი ძალა დახრილია) 1 სხივმა უნდა გაიაროს უძრავი A საყრდენის სახსრის ცენტრში P_1 ძალის მოქმედების მიმართულების გაგრძელების გადაკვეთამდე. შემდეგ, P_1 ძალის გადაკვეთის წერტილიდან გავიყვანთ მე-2 სხივის პარალელურ ხაზს P_2 ძალის გადაკვეთამდე, მიღებული გადაკვეთის წერტილიდან მე-3 სხივის პარალელურ ხაზს P_3 ძალის გადაკვეთამდე და საბოლოოდ, P_3 ძალის გადაკვეთის წერტილიდან მე-4 სხივის პარალელურ ხაზს მოძრავი B საყრდენი რეაქციის გადაკვეთამდე. თუ გადაკვეთის n წერტილს შევაერთებთ უძრავი საყრდენის სახსრის A წერტილთან, მივიღებთ nA ხაზს, რომელიც იქნება თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტი. ამის შემდეგ ადვილად მოიძებნება A და B რეაქციების სიდიდეები, თუ O წერტილიდან გავიყვანთ (ნახ. 26, b) მე-5 სხივს nA

ჩამკეტის პარალელურად. ამ სხივისა და d წერტილიდან (ნახ. 26, b) გავლებული B რეაქციის მიმართულების გადაკვეთა მოგვცემს B რეაქციის სიდიდეს, რომელიც ტოლი იქნება df მონაკვეთის, ხოლო f წერტილის a წერტილთან შეერთებით მივიღებთ fa მონაკვეთის ტოლი სიდიდის A რეაქციას. 26, b ნახაზიდან განისაზღვრებიან აგრეთვე A და B რეაქციების მიმართულებანი, რადგან, თუ ძალთა მრავალკუთხედში ძალებს მივმართავთ ერთ მხარეს, მაშინ ადვილი იქნება უცნობი A და B რეაქციების მიმართულებათა პოვნა. A რეაქცია შეგვიძლია დავშალოთ ორ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ მდგენელებად, რომელთა სიდიდეები და მიმართულებანი აღნიშნულია 26, a ნახაზზე.

ამოცანა 2. სამსახსრიან ACB კამარაზე მოქმედებს P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალები. განვსაზღვროთ A და B საყრდენი რეაქციები (ნახ. 27, a).



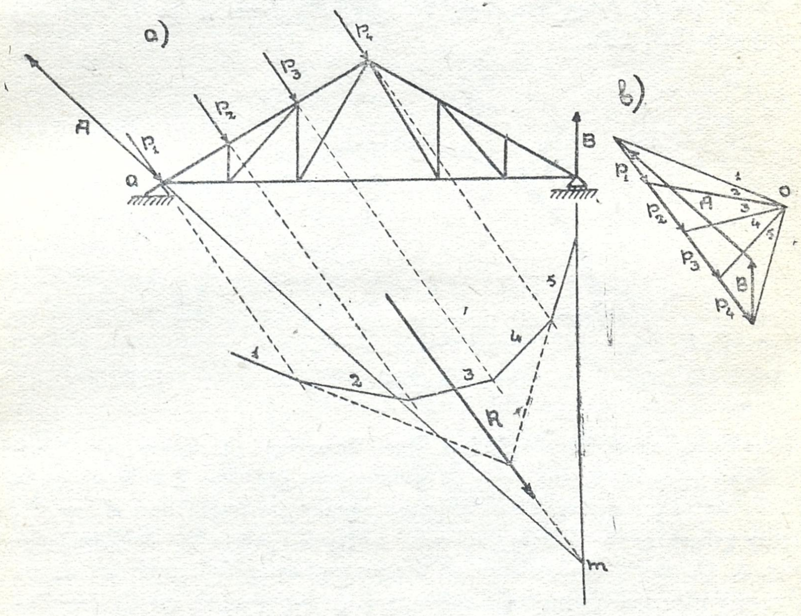
ნახ. 27.

ამოხსნა. დავიყვანოთ P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალთა სისტემა R ტოლქმედზე. ამისათვის ცნობილი წესით ავაგოთ ძალთა მრავალკუთხედი, რომლითაც განისაზღვრება R ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება (ნახ. 27, b). მისი მოდების წერტილის განსაზღვრისათვის კი საჭიროა თოკის მრავალკუთხედის აგება (ნახ. 27, a). ამნაირად, მივიღებთ, რომ მოცემულ სამსახსრიან კამარაზე მოქმედი ძალთა სისტემა დაიყვანება ეკვივალენტურ R ტოლქმედზე, რომლის გათვალისწინებით უნდა ვიპოვოთ საყრდენი A და B რეაქციები. ეს ამოცანა ანალოგიურია § 3-ში განხი–

ლული მე·5 ამოცანის. რეაქციების მიმართულებანი, მათი სიდიდეები და მოდების წერტილები განსაზღვრულია 27, *a* და 27, *b* ნახაზებზე.

ა მ ო ც ა ნ ა 3. A ბოლოთი სახსროვნად დამაგრებული და B ბოლოთი თავისუფლად მდებარე ფერმა კვანძებზე განიცდის P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალების მოქმედებას (ნახ. 28, *a*). განვსაზღვროთ A და B საყრდენი რეაქციები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა განვსაზღვროთ R ტოლქმედის სიდიდე და მიმართულება ძალთა მრავალკუთხედის აგებით, ხოლო



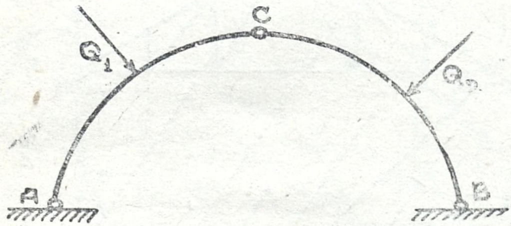
ნახ. 28.

მოდების წერტილი თოკის მრავალკუთხედით. R ტოლქმედის სიდიდის, მიმართულების და მოდების წერტილის განსაზღვრა მოყვანილია 28, *a* და 28, *b* ნახაზებზე. მარჯვენა საყრდენის თავისუფლად მდებარეობის გამო B რეაქცია მიმართული იქნება პერპენდიკულარულად, ხოლო მარცხენა

საყრდენი რეაქციის მიმართულება დაემთხვევა R ტოლქმედი ძალისა და B რეაქციის მიმართულებათა გადაკვეთის m წერტილს და A საყრდენის ცენტრზე გამავალ სწორს.

საბოლოოდ, A და B რეაქციების განსაზღვრა დაიყვანება ტოლქმედი R ძალის გაწონასწორებაზე ორ Am და Bm მიმართულებებზე, რომელიც მოყვანილია 28, *b* ნახაზზე. A და B რეაქციები მოდებული არიან საყრდენებზე (ნახ. 28, *a*), რომელთა მიმართულებანი და სიდიდეები გადმოტანილია ძალთა წონასწორობის სამკუთხედიდან (ნახ. 28, *b*).

ა მ ო ც ა ნ ა 4. სამსახსრიან ACB კამარის AC და CB ნაწილებზე მოქმედებენ ძალთა სისტემები, რომლებიც ცნობილი წესებით დაყვანილი არიან Q_1 და Q_2 ტოლქმედ ძალებზე. განვსაზღვროთ A და B საყრდენი რეაქციები (ნახ. 28′).



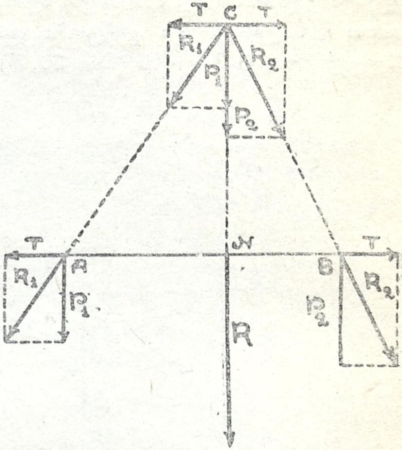
ნახ. 28′.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანა ამოვხსნათ ჯერ მხოლოდ Q_1 ძალის მოქმედების შემთხვევისათვის, როგორც ეს განხილული გვქონდა § 2-ში ამოცანა № 5 სახით. Q_1 ძალისაგან გამოწვეული რეაქციები ავღნიშნოთ A_1 და B_1. შემდეგ განვიხილოთ შემთხვევა, რომ, თითქოს კამარაზე მოქმედებდეს მხოლოდ Q_2 ძალა, რომლისთვისაც ანალოგიურად განვსაზღვრავთ A_2 და B_2 რეაქციებს, გამოწვეულს Q_2 ძალისაგან. ცალ-ცალკე Q_1 და Q_2 ძალებისაგან გამოწვეული რეაქციების გეომეტრიული შეჯამება ($A_1+A_2=A$, $B_1+B_2=B$) მოგვცემს Q_1 და Q_2 ძალებისაგან გამოწვეულ რეაქციებს.

§ 9. პარალელური ძალების შეკრება, დაშლა და გაწონასწორება

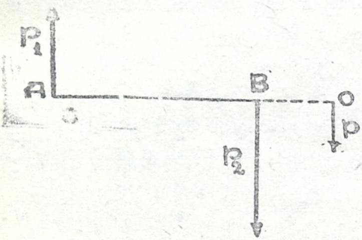
ა) ო რ ი პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი ძ ა ლ ი ს შ ე კ რ ე ბ ა, რ ო მ ლ ე ბ ი ც მ ი მ ა რ თ უ ლ ი ა ე რ თ დ ა ი მ ა ვ ე მ ხ ა რ ე ს.

ვთქვათ, მოცემულია A და B წერტილებზე მოდებული ორი ერთმანეთისადმი პარალელური P_1 და P_2 ძალა. განვსაზღვროთ მათი (R) ტოლქმედი (ნახ. 29).



ნახ. 29

შევაერთოთ A და B წერტილები AB ხაზით და მის ბოლო წერტილებზე მოვდოთ ორი ნებისმიერი თანაწინააღმდეგი T ძალა (ნახ. 29), T, P_1 და T, P_2 ძალების შეჯამებით მივიღებთ R_1 და R_2 ტოლქმედებს. მიღებული R_1 და R_2 ძალებისაგან შემდგარი სისტემა ეკვივალენტურია მოცემული P_1 და P_2 ძალთა სისტემის. გადავიტანოთ ძალები მათ გაგრძელებათა გადაკვეთის C წერტილში და დავშალოთ ისინი P_1, T და P_2, T ძალებად. C წერტილზე მოდებული T ძალები ურთიერთ წონასწორდებიან, ხოლო P_1, P_2 ძალები აღმოჩნდებიან ეკვივალენტური A და B წერტილებზე მოდებული ძალების. ტოლქმედი $R=P_1+P_2$ მიმართულია მოცემული ძალებისაკენ და მოდებულია მათი შემაერთებელი AB ხაზის N წერტილზე. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ასეთი ძალების მოქმედების შემთხვევაში ყოველთვის დაცული იქნება პირობა $P_1 \cdot AN = P_2 \cdot NB$ (ნახ. 29). დაწვრილებით ამ საკითხის ახსნა მოყვანილია სტატიკის სახელმძღვანელოებში.

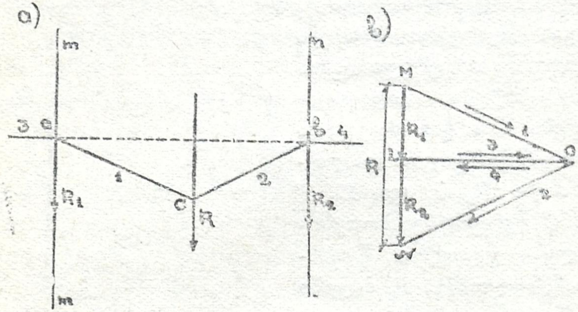


ნახ. 29 a

ადვილია იმის ჩვენებაც, რომ ორი პარალელური და მიმართულებით მოწინააღმდეგე P_1 და P_2 ძალების ტოლქმედი, სიდიდით უდრის ამ ძალების სიდიდეების სხვაობას, რომელსაც აქვს უდიდესი ძალის მიმართულება და მოდებულია მათი შემაერთებელი ხაზის გაგრძელებაზე ამ ძალების უკუპროპორციულად. სტატიკის პირობიდან ცნობილია, რომ

$(AO):(BO)=P_2:P_1$ (ნახ. 29, *a*), საიდანაც ადვილად ვიპოვით (BO) სიდიდეს.

ბ) ძალის დაშლა მის პარალელურ ორ მიმართულებაზე. დავშალოთ მოცემული R ძალა მის პარალელურ mm და nn მიმართულებებზე (ნახ. 30, *a*). ამისათვის ნებისმიერად შერჩეულ M წერტილზე მოვდოთ R ძალის ტოლი ვექტორი და მისი საწყისი და ბოლო წერტილი შევუერთოთ O პოლუსს (ნახ. 30, *b*). R ძალის გამომხატველ ვექტორზე



ნახ. 30.

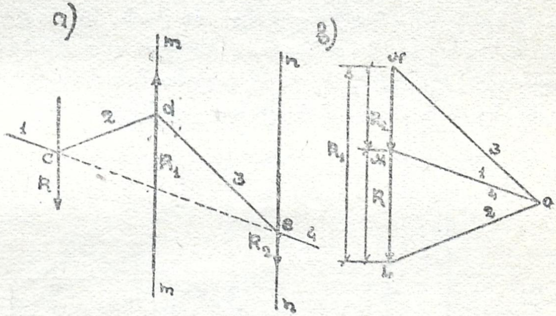
შევარჩიოთ ნებისმიერი c წერტილი (ნახ. 30, *a*) და ცნობილი წესით ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედის 1 და მე-2 გვერდები, რომლებიც mm და nn მიმართულებებს გადაკვეთენ a და b წერტილებში. შევაერთოთ a და b წერტილები და O პოლუსიდან გავატაროთ ab ხაზის პარალელური მე-3 სხივი, რომელიც R ძალას გადაკვეთს L წერტილში (ნახ. 30, *b*). ab სწორით განისაზღვრება თოკის მრავალკუთხედის მე-3 და მე-4 გვერდების მდებარეობა. ML და LN მონაკვეთები წარმოადგენენ R ძალის მდგენელებს, რომელთა მიმართულება იგივეა, რაც მოცემული R ძალის მიმართულება.

ამის დასამტკიცებლად დავშალოთ R ძალა (ნახ. 30, *a*) ac და cb მიმართულებებზე, რომელთა სიდიდეები განისაზღვრებიან ძალთა MNO სამკუთხედიდან (ნახ. 30, *b*). 1 ძალა დავშალოთ ab და მოცემულ mm მიმართულებაზე, რომლის მდგენელები მე-3 და R_1 განისაზღვრება ძალთა MLO სამკუთხედიდან. ასევე, მე-2 ძალის დაშლით ba და მოცემულ nn მიმართულე-

ბეზზე მივიღებთ მე-4 და R_2 მდგენელებს, რომლებიც ძალთა LNO სამკუთხედიდან განისაზღვრებიან.

მე-3 და მე-4 ძალები ერთმანეთის ტოლია და მიმართულია მოწინააღმდეგე მხარეს, ამიტომ ისინი ერთმანეთს გააწონასწორებენ. დაგვრჩება $R_1=ML$ და $R_2=LN$ ძალები, რომელთა შეჯამება მოგვცემს მოცემულ R ძალას, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

გ) ძალის გაწონასწორება მის პარალელურ ორ მიმართულებაზე. გავაწონასწოროთ მოცემული R ძალა მისი პარალელური mm და nn მიმართულებებზე (ნახ. 31, a). ამისათვის ნებისმიერ M წერტილიდან გადავზომოთ R ძალის ტოლი ვექტორი და მისი საწყისი და ბოლო წერტილები შევუერთოთ O პოლუსს (ნახ. 31, b) 1 და მე-2 სხივებით, რომლებიც განსაზღვრავენ R ძალის (ნახ. 31, a) ნებისმიერი c წერტილიდან



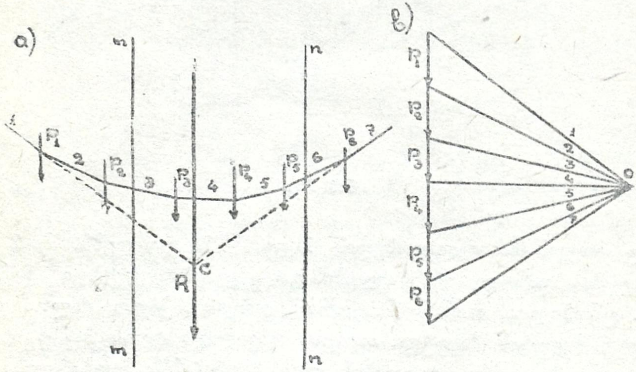
ნახ. 31.

აგებულ თოკის მრავალკუთხედის 1 და მე-2 გვერდებს. მე-2 გვერდის გაგრძელების და mm მიმართულების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ d ასოთი. ცნობილია, რომ წონასწორობისათვის საჭიროა ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების ჩაკეტვა. თოკის მრავალკუთხედის ჩაკეტვის პირობა კი არის მისი კიდურა გვერდების ერთ სწორ ხაზზე მდებარეობა. ამისათვის გავაგრძელოთ 1 გვერდი, რის შედეგადაც მივიღებთ თოკის მრავალკუთხედის მეორე კიდურა მე-4 გვერდს (ნახ. 31, a). გავლებული სწორი ხაზი nn მიმართულებას გადაკვეთს e წერტილში. d და e წერტილების შეერთებით მივიღებთ თოკის მრავალკუთხედის მე-3 გვერდს. O პოლუსიდან მე-3 გვერდის პარალელურად გავლებული მე-3 სხივი გადაჰკვეთს R ძალის გამომხატველ ვექტორს ან მის გაგრძელებას N წერტილში. MN მონაკვეთი აღვნიშნოთ R_2-თი, ხოლო NL მონაკვეთი—R_1-ით (ნახ. 31, b).

R_1 და R_2 ვექტორები იქნებიან R ძალის მდგენელები, რომელთა მიმართულებები, წონასწორობის პირობის გათვალისწინებით, ნაჩვენებია ნახაზზე, სახელდობრ, R_1 ვექტორი მიმართული იქნება L-დან N-კენ. ხოლო R_2 ვექტორი—N-დან M-კენ. R_2 ძალა მოვზომოთ nn მიმართულებაზე, რადგან ის იმყოფება მე-3 და მე-4 სხივებს შორის, ხოლო R_1—mm მიმართულებაზე, როგორც მე-2 და მე-3 სხივებს შორის მდებარე. ამნაირად, მოცემული R ძალა გაწონასწორდა mm და nn მიმართულებებზე R_1 და R_2 მდგენელების სახით.

თუ მოცემული R ძალა მოთავსებული იქნებოდა მის პარალელურ ორ მიმართულებათა შორის, მაშინ ეს ამოცანა დაიყვანებოდა § 9-ში განხილულ ბ) შემთხვევაზე იმ განსხვავებით, რომ R_1 და R_2 ძალები მიმართული იქნებოდნენ მოწინააღმდეგე მხარეს.

დ) რამდენიმე პარალელური ძალის შეკრება, დაშლა და გაწონასწორება მათ პარალელურ ორ მიმართულებაზე. დავშალოთ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 და P_6 ძალები მათ პარალელურ mm და nn მიმართულებებზე (ნახ. 32 a). ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის საჭიროა მო-



ნახ. 32.

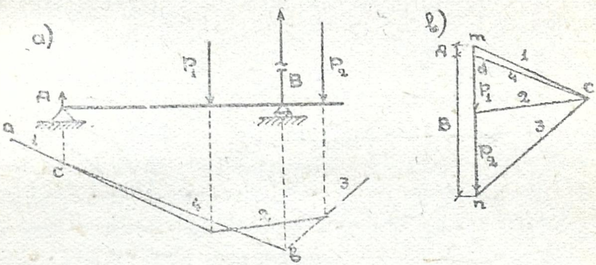
ცემული ძალებისათვის R ტოლქმედის პოვნა, რის შედეგადაც მივიღებთ ერთ R ძალას, რომელიც ამოცანის მოთხოვნის თანახმად, უნდა დაიშალოს mm და nn მიმართულებებზე. R ტოლქმედის საპოვნელად კი საჭიროა ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების განხილული წესით აგება, ხოლო მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის თოკის მრავალკუთხედის კიდურა გვერდების გაგრძელებების გადაკვეთის c წერტილზე მოდება (ნახ. 32, a, 32, b). მაშა-

სადამე, მოცემულ ძალთა სისტემისათვის ვიპოვეთ ტოლქმედის სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი, ე. ი. მოცემული ძალთა სისტემა დაყვანილ იქნა მის ეკვივალენტურ ერთ ძალაზე, რის გამოც ამოცანა ანალოგიური იქნება § 9 განხილული ბ) შემთხვევის.

თუ საჭირო იქნებოდა ძალთა სისტემის გაწონასწორება მის პარალელურ mm და nn მიმართულებებზე, მაშინ აგებას ჩავატარებდით § 9 განხილული გ) შემთხვევის ანალოგიურად, რომელიც შეეხება ძალის გაწონასწორებას მის პარალელურ ორ მიმართულებაზე.

§ 10. ამოცანები პარალელურ ძალთა შემთხვევისათვის

ამოცანა 1. მოცემულია ორ საყრდენზე მდებარე კონსოლიანი ჰორიზონტალური კოჭი მასზე მოქმედი P_1 და P_2 ვერტიკალური ძალებით. საჭიროა განისაზღვროს A და B საყრდენი რეაქციები (ნახ. 33, a).

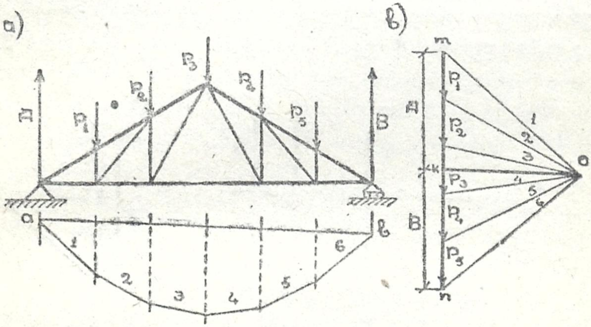


ნახ. 33.

ამოხსნა. ავაგოთ ძალთა მრავალკუთხედი, რომელიც მოცემული პარალელური ძალების გამო მიიღებს ვერტიკალური მონაკვეთის მდებარეობას (ნახ 33, b). A და B რეაქციების განსაზღვრისათვის ნებისმიერად შერჩეული a წერტილიდან ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი (ნახ. 33, a). გავაგრძელოთ მე-3 სხივი B რეაქციის მიმართულების გადაკვეთამდე (მოცემული P_1 და P_2 ვერტიკალური ძალების გამო A და B რეაქციებსაც ექნება ვერტიკალური მიმართულება). გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ b ასოთი და შევუერთოთ 1 სხივისა და A რეაქციის მიმართულების გადაკვეთის c წერტილს. მივიღებთ თოკის მრავალკუთხედის (ჩამკეტის) მე-4 გვერდის მდებარეობას. O წერტილიდან გავავლოთ მე-4 გვერდის პარალელურად მე-4 სხივი, რომელიც mn სწორზე მოჰკვეთს nd და dm მონაკვეთებს. nd და dm მონაკვეთები გამოხატავენ B და A რეაქციების სიდიდეებს, რომლებიც მიმართული იქნებიან მოქმედი ძალების მოწინააღმდეგე მხარეს.

ა მ ო ც ა ნ ა 2. მოცემულია ორ საყრდენზე მდებარე ფერმა მასზე მოქმედი P_1, P_2, P_3, P_4 და P_5 პარალელური ძალებით (ნახ. 34, *a*). საჭიროა განისაზღვროს A და B საყრდენი რეაქციები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. A და B საყრდენი რეაქციების საპოვნელად საჭიროა ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები. ძალების ვერტიკალურ სწორ ხაზზე გადაზომვით, O პოლუსის შერჩევისა და სხივების გატარების შემდეგ (ნახ. 34, *b*), თოკის მრავალკუთხედის აგება დავიწყოთ A რეაქციის მიმართულებაზე მდებარე ნებისმიერი *a* წერტილიდან. გავაგრძელოთ თოკის მრავალკუთხედის მე-6 გვერდი B რეაქციის მიმართულების გადაკვეთამდე და გადაკვეთის *b* წერტილი შევუერთოთ *a* წერტილს. *ba* გვერდი იქნება



ნახ. 34.

თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტი (ნახ. 34, *a*). O პოლუსიდან გავატაროთ *ab* ჩამკეტის პარალელური სწორი, რომელიც ტოლქმედ ძალაზე მოჰკვეთს *km* და *nk* მონაკვეთებს, რომლებიც ტოლი იქნებიან A და B საყრდენი რეაქციების. წონასწორობის პირობის თანახმად, საყრდენი რეაქციები მიმართული იქნებიან ტოლქმედი *mn* ძალის მოწინააღმდეგე მხარეს (ნახ. 34, *b*).

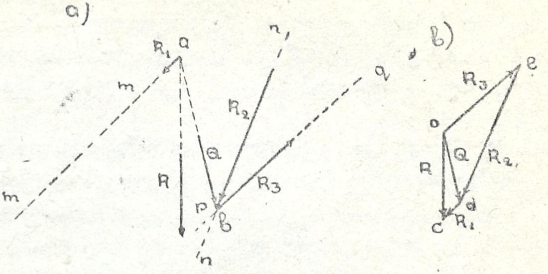
§ 11. ძალის და ძალთა სისტემის დაშლა და გაწონასწორება მიმართულებებზე, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთებიან

1. ძ ა ლ ი ს დ ა შ ლ ა ს ა მ მ ი მ ა რ თ უ ლ ე ბ ა ზ ე, რ ო მ ლ ე ბ ი ც ე რ თ წ ე რ ტ ი ლ შ ი ა რ ი კ ვ ე თ ე ბ ი ა ნ.

დავშალოთ R ძალა *mm*, *nn* და *pq* მიმართულებებზე (ნახ. 35, *a*).

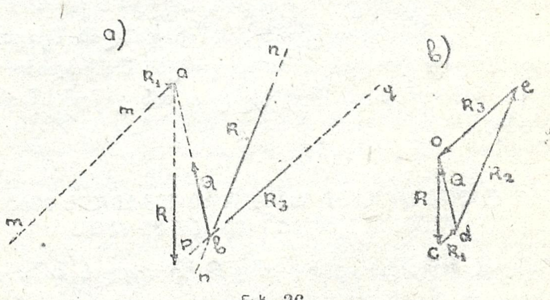
ამისათვის გავაგრძელოთ *mm* მიმართულება მოცემული R ძალის მიმართულების გადაკვეთამდე (თუ ეს მიმართულება არ გადაკვეთს, მაშინ

ავიღებთ სხვა მიმართულებას). გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ a ასოთი, ხოლო nn და pq მიმართულებების გადაკვეთა—b ასოთი. შევაერთოთ a და b წერტილები და განხილული წესის გამოყენებით დავშალოთ R ძალა ab და mm მიმართულებებზე. Q და R_1 მდგენელები შეესა-



ნახ. 35.

ბამებიან ab და mm მიმართულებებზე R ძალის დაშლას, რომელთა სიდიდეები და მიმართულებები განისაზღვრებიან ocd ძალთა სამკუთხედიდან (ნახ. 35, b). ამის შემდეგ Q ძალა დავშალოთ nn და pq მიმართულებებზე. R_2 და R_3 მდგენელები შეესაბამებიან nn და pq მიმართულებებზე Q ძალის დაშლას, რომელთა სიდიდეები და მიმართულებანი განისაზღვრებიან oed ძალთა სამკუთხედიდან (ნახ. 35, b). მიღებული R_1, R_2 და R_3 მდგენელები გადავზომოთ შესაბამისად mm, nn და pq მიმართულებებზე, რის შედეგადაც მივიღებთ ძალის დაშლას სამ მიმართულებაზე.



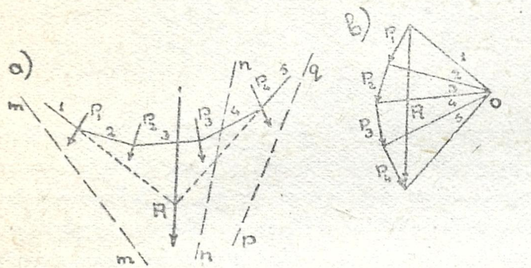
ნახ. 36.

2. ძალის გაწონასწორება სამი მიმართულებით, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთებიან.

ამოცანის ამოხსნა ანალოგიურია წინა შემთხვევის, რომელიც შეეხება მოცემული R ძალის დაშლას mm, nn და pq მიმართულებებზე. განსხვავება იქნება მხოლოდ მდგენელი ძალების მიმართულებებში, რომლებიც მოპირდაპირე მხარეს იქნებიან მიმართული ნახ. 35, a-ზე წარმოდგენილ მდგენელი ძალების მიმართულებებთან შედარებით (ნახ. 36, a და 36, b).

3. ძალთა სისტემის დაშლა და გაწონასწორება სამი მიმართულებით, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთებიან.

დავშალოთ P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალთა სისტემა mm, nn და pq მიმართულებებზე, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთებიან (ნახ. 37, a).



ნახ. 37.

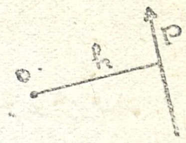
ამისათვის ვიპოვოთ P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალების ტოლქმედის სიდიდე და მოდების წერტილი, რომელიც მოიძებნება ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით (ნახ. 37, b და 37, a), რის შედეგადაც P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედ R ძალაზე, რომელიც ამოიხსნება § 11-ში განხილული პირველი შემთხვევის ანალოგიურად.

თუ საჭირო იქნებოდა მოცემულ ძალთა სისტემის გაწონასწორება აღებულ mm, nn და pq მიმართულებებზე, მაშინ დაშლის შედეგად მიღებულ მდგენელ ძალებს შევუცვლიდით მიმართულებებს მოპირდაპირეზე ან ცნობილი წესების გამოყენებით მოვახდენდით მის გაწონასწორებას სამივე მიმართულებაზე.

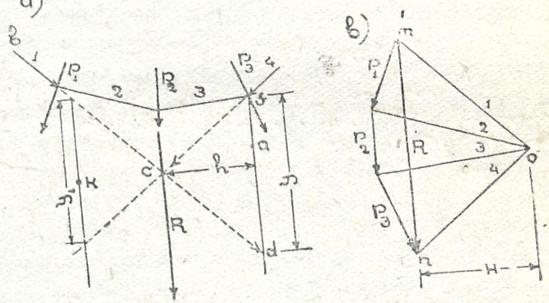
§ 12. ძალთა მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ, მღუნავი მომენტი და განივი ძალა

რაიმე P ძალის მომენტი ნებისმიერი O წერტილის მიმართ ტოლია ამ ძალისა და აღებულ წერტილიდან ძალამდე დაშვებული პერპენდიკულარის სიდიდეთა ნამრავლის. განმარტების თანახმად $M = P \cdot h$ (ნახ. 38). შეიძლება მომენტი იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითიც. იმ შემთხვევაში, თუ ძალის ბრუნვა ემთხვევა საათის ისრის მოძრაობის მიმარ-

თულებას, მომენტი იქნება დადებითი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უარყოფითი. ჩვენი მიზანია გრაფიკული მეთოდით რაიმე წერტილის მიმართ მომენტის სიდიდის განსაზღვრა. ამ მიზნით განვიხილოთ რაიმე P_1, P_2 და P_3 ძალთა სისტემა (ნახ. 39, *a*), რომლისთვისაც განვსაზღვროთ *a* წერტილის მიმართ მომენტის სიდიდე. ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის საჭიროა ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგება. ძალთა მრავალკუთხედის აგების (ძალების გადაზომვით, O პოლუსის შერჩევისა და სხივების გატარებით) შემდეგ (ნახ. 39, *b*) თოკის მრავალკუთხედის აგება დავიწყოთ ნებისმიერი *b* წერტილიდან (ნახ. 39, *a*). მისი კიდურა 1 და მე-4 გვერდების გაგრძელებათა გადაკვეთის *c* წერტილი განსაზღვრავს *R* ტოლქმედის მდებარეობას. ამის შემდეგ *a* წერტილზე გავატაროთ *R* ტოლქმედის პარალელური ხაზი თოკის მრავალკუთხედის კიდურა გვერდების გაგრძელებათა გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ *d* და *f* ასოებით, ხოლო *df* მონაკვეთის სიგრძე *y*-ით. აღებული *a* წერტილის მიმართ *R* ტოლქმედის მომენტი ან, რაც იგივეა, მოცემულ ძალთა სისტემის მომენტი, აბსოლუტური სიდიდით უდრის *R* ტოლქმედისა და *h* სიდიდის ნამრავლს, მაშასადამე,



ნახ. 38



ნახ. 39.

$$M_a = R \cdot h,$$

სადაც *h* არის *c* წერტილიდან ან *R* ტოლქმედიდან დაშვებული პერპენდიკულარი *df* მონაკვეთზე. გვერდების ურთიერთპარალელურობის გამო სამკუთხედი *cdf* (ნახ. 39, *a*) მსგავსია სამკუთხედ *mon* (ნახ. 39, *b*), ამიტომ:

$$\frac{R}{y} = \frac{H}{h}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

სადაც H არის mon სამკუთხედის სიმაღლე ან O პოლუსიდან დაშვებული პერპენდიკულარი R ტოლქმედზე. აღნიშნულ H სიდიდეს ეწოდება საპოლუსო მანძილი. (1) ფორმულიდან გვაქვს:

$$R\cdot h=H\cdot y.$$

მაგრამ, რადგან $M_a=R\cdot h$, ამიტომ

$$M_a=H\cdot y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

მივიღეთ, რომ ძალთა სისტემის მომენტი მოცემული წერტილის მიმართ უდრის საპოლუსო მანძილისა და y მონაკვეთის ნამრავლს. როგორც მე-2 ფორმულიდან ჩანს, საჭირო არ არის R ტოლქმედის მოდების წერტილისა და, მაშასადამე, მისი მდებარეობის განსაზღვრა; საჭიროა გაგება მხოლოდ y და H სიდიდეების (მასშტაბის გათვალისწინებით), რომლებიც ადვილად განისაზღვრებიან აღნიშნული წესის გამოყენებით.

თუ ძალა გამოხატულია ტონებში, მაშინ საპოლუსო მანძილი, რომელიც აგრეთვე ძალას გამოხატავს, უნდა გამოვსახოთ ტონებში, რის გამოც Hy ნამრავლის განზომილება იქნება ტონამეტრი ან კიდევ კილოგრამმეტრი, თუ ძალისა და სიგრძის განზომილებებია კილოგრამი და მეტრი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, R ტოლქმედი სისტემის მობრუნებას ცდილობს a წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ამიტომ, ჩვენი შეთანხმების თანახმად, მომენტს ექნება უარყოფითი მნიშვნელობა, ე. ი.

$$M=-R\cdot h.$$

მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია R მდებარეობის განსაზღვრის გარეშეც დავაწესოთ ნიშანთა წესი. ამისათვის, დავუშვათ, რომ R ტოლქმედი დავშალეთ 1 და მე-4 მიმართულებებზე (ნახ. 39, b). mon ძალთა სამკუთხედიდან განისაზღვრება R ტოლქმედის მდგენელების მიმართულებები. გადავიტანოთ ისინი თოკის მრავალკუთხედის კიდურა 1 და მე-4 გვერდებზე (ნახ. 39, a). თუ მათ მიმართულებებს მივიღებთ cdf სამკუთხედის გვერდების შესაბამისად, მაშინ შევნიშნავთ, რომ fc და cd გვერდებზე მდებარე მდგენელებს a წერტილის გარშემო ბრუნვისას ექნება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება, რის გამოც მომენტი უარყოფითი იქნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ cfd სამკუთხედის cf და cd გვერდებს ექნება მოპირდაპირე მიმართულება, მაშინ კი დადებითი.

ე რ თ ი დ ა ი გ ი ვ ე თ ო კ ი ს მ რ ა ვ ა ლ კ უ თ ხ ე დ ი თ შ ე გ ვ ი ძ ლ ი ა გ ა ნ ვ ს ა ზ ღ ვ რ ო თ მ ო მ ე ნ ტ ი ს ს ი დ ი დ ე ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი-

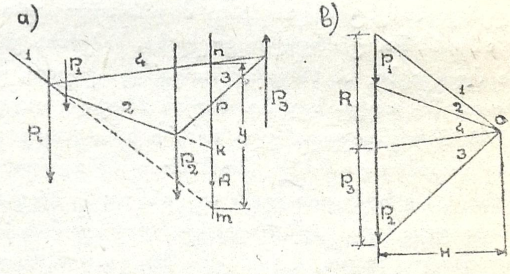
ლის მიმართ. მაგალითად, თუ გვინდა k წერტილის მიმართ მომენტის სიდიდის გამოთვლა, (ნახ. 39, *a*) მაშინ,

$$M_K = H \cdot y_1,$$

რომლის ნიშანი გაირკვევა ზემოგანხილული წესის მიხედვით (დადებითია).

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია პარალელურ ძალთა სისტემა, მისთვის მომენტის განსაზღვრა რომელიმე წერტილის მიმართ წარმოებს ისევე, როგორც ზემოგანხილული შემთხვევისათვის, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ გადაზომილი ძალები მოთავსდებიან ერთ ვერტიკალზე.

ვთქვათ, მოცემულია პარალელურ P_1, P_2 და P_3 ძალთა სისტემა და საჭიროა A წერტილის მიმართ მომენტის მნიშვნელობის განსაზღვრა (ნახ. 40, *a*). ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგება (ნახ. 40, *a* და 40, *b*), რის შედეგადაც განისაზღვრება R ტოლქმედის სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი. მოცემული ძალთა სისტემის ან, რაც იგივეა, მათი ტოლქმედის მომენტის საპოვნელად, აღებულ A წერტილზე გავავლოთ R ტოლქმედის პარალელური ხაზი, რომელიც თოკის მრავალკუთხედის კიდურა გვერდებს გადაკვეთს m და n წერტილებში. ჩვენი აღნიშვნის თანახმად, მივიღოთ $mn=y$ ტოლად, მაშინ A წერტილის მიმართ მომენტი, ზემომიღებული ნიშანთა წესის მიხედვით, იქნება:



ნახ. 40.

$$M_A = -Hy,$$

სადაც H არის O პოლუსიდან R ტოლქმედზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიდიდე.

თითოეული ძალისათვის მომენტის სიდიდე A წერტილის მიმართ იქნება:

$$M_{A\,(P_1)} = -H \cdot mk, \quad M_{A\,(P_2)} = -H \cdot kp \text{ და } M_{A\,(P_3)} = -H \cdot pn,$$

მათი ჯამი კი მოგვცემს:

$$M_{A\,(P_1)} + M_{A\,(P_2)} + M_{A\,(P_3)} = -H(mk+kp+pn) = -Hy,$$

ე. ი. იმავე სიდიდეს, რაც ტოლქმედი ძალის შემთხვევაში.

მომენტის განსაზღვრის, ნიშანთა წესის შემოღებისა და ზემომოყვანილი განმარტებების გათვალისწინების შემდეგ, შეგვიძლია გრაფიკულად მღუნავი მომენტის და განივი ძალის ეპიურების აგება. *მღუნავი მომენტი კოჭის რაიმე კვეთში არის კვეთის ერთ მხარეზე მდებარე ყველა ძალის მომენტების ჯამი, აღებული კვეთის ცენტრის მიმართ. განივი ძალა კი კვეთის ერთ მხარეზე მდებარე მოქმედი ძალების გეგმილების ჯამი კოჭის ღერძის პერპედიკულარულ მიმართულებაზე.*

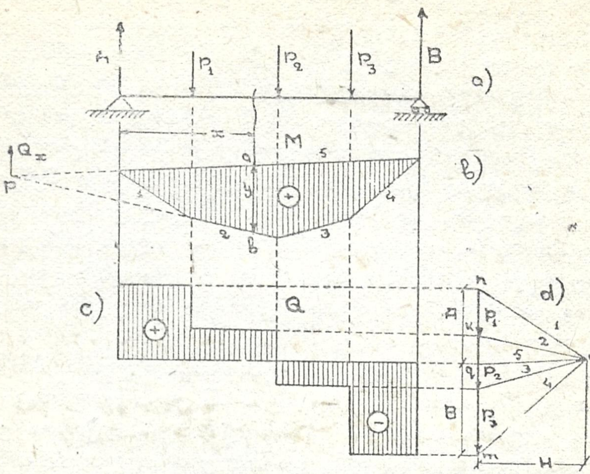
მღუნავი მომენტი დადებითად ჩაითვლება მაშინ, თუ ის კვეთის მარცხენა ნაწილს მოაბრუნებს საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო მარჯვენას კი საათის ისრის მოძრაობის მოწინააღმდეგე მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში მღუნავი მომენტი ჩაითვლება უარყოფითად. განივი ძალა დადებითად ჩაითვლება მაშინ, თუ ის კვეთის მარცხენა ნაწილზე მოქმედებს ქვემოდან ზემოთ, ხოლო მარჯვენაზე კი ზემოდან ქვემოთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში განივი ძალა ჩაითვლება უარყოფითად.

მღუნავი მომენტის და განივი ძალის გრაფიკულად აგების მიზნით განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. მოცემულია ორ საყრდენზე მდებარე კოჭი, მასზე მოქმედი პარალელურ P_1, P_2 და P_3 ძალთა სისტემით. განვსაზღვროთ მღუნავი მომენტის და განივი ძალის სიდიდეები (ნახ. 41, *a*).

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა ვიპოვოთ A და B საყრდენი რეაქციები. ამისათვის, როგორც ვიცით, უნდა ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები. ძალთა მრავალკუთხედის აგებისათვის გავატაროთ პერპენდიკულარული სწორი ხაზი (ძალების ურთიერთ პარალელურობის გამო) და მასზე მოვზომოთ მიმდევრობით P_1, P_2 და P_3 ძალები (ნახ. 41, *d*), რომელთა ჯამი აღვნიშნოთ P ასოთი. შევარჩიოთ ნებისმიერი O პოლუსი და პერპენდიკულარულ სწორ ხაზზე მოზომილი ძალების საწყისი და ბოლო წერტილები შევაერთოთ მასთან სხივებით (ნახ. 41 *d*). ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი და ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი (ნახ. 41, *b*). გავაგრძელოთ 1 და მე-4 სხივები A და B საყრდენებზე გამავალ პერპენდიკულარების გადაკვეთამდე. შევაერთოთ გადაკვეთის წერტილები, რის შედეგადაც მივიღებთ მრავალკუთხედის ჩამკეტს, რომლითაც განისაზღვრება A და B საყრდენი რეაქციების სიდიდეები. ამისათვის, O პოლუსიდან გავატაროთ თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტის პარალელური მე-5 სხივი, რომელიც nm პერპენდიკულარულ ხაზს გადაჰკვეთს q წერტილში. qn და mq მონაკვეთები სიდიდით ტოლი იქნებიან A და B საყრდენი რეაქციების და წონასწორობის პირობის გამო მიმართული P ტოლქმე-

დი ძალის მოპირდაპირე მხარეს. A საყრდენიდან ნებისმიერ x მანძილზე დაშორებული კვეთისათვის მღუნავი მომენტის სიდიდე იქნება საპოლუსო H მანძილისა და y ორდინატის ნამრავლი (ნახ. 41, b, 41, d). მართლაც, თუ



ნახ. 41.

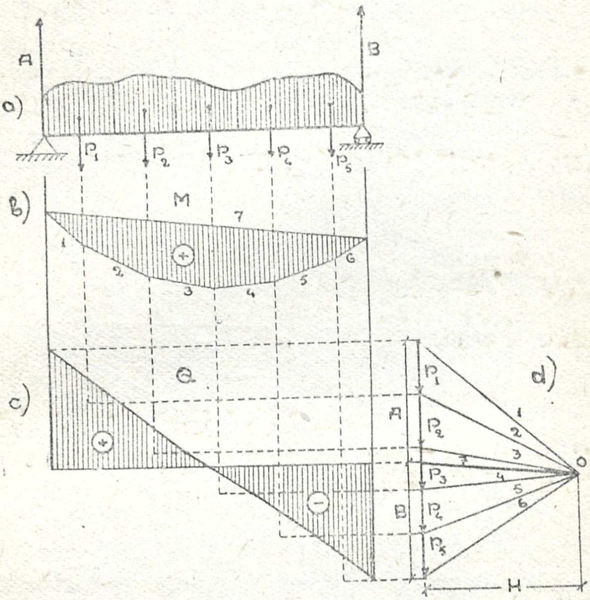
განვიხილავთ მსგავს pab და koq სამკუთხედებს (ნახ. 41, b, 41, d) ადვილად დავამტკიცებთ, რომ:

$$M_x = y \cdot H,$$

სადაც y ორდინატი წარმოადგენს განსახილველ x კვეთში თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტსა და შესაბამის გვერდს (ჩვენს შემთხვევაში მე-5 და მე-2 გვერდი) შორის მოთავსებულ მანძილს. უნდა გვახსოვდეს, რომ y ორდინატის გაზომვა ყოველთვის უნდა ვაწარმოოთ თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტიდან (ჩვენს შემთხვევაში მე-5 გვერდიდან). თუ თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტის (მე-5 გვ.) ქვემოთ მოთავსებულია მისი დანარჩენი გვერდები, მაშინ კოჭის მთელ სიგრძეზე მღუნავი მომენტის ეპიურას ექნება დადებითი ნიშანი (ნახ. 41 b), წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უარყოფითი, და თუ თოკის მრავალკუთხედის გვერდების ნაწილი მოთავსებულია ჩამკეტის ზემოთ და ქვემოთ, მაშინ მღუნავი მომენტის ეპიურას ექნება ორი ნიშანი—დადებითი და უარყოფითი, რომელთა უბნის სიგრძეები განისაზღვრება ზემოთქმულის მიხედვით.

ლის ორდინატების ნამრავლი საპოლუსო მანძილზე, მასშტაბები
გათვალისწინებით, მოგვცემს მღუნავი მომენტის შესაბამის სიდიდეებს.

აგებული თოკის მრავალკუთხედი მიახლოებით მოგვცემს მღუნავ მომენტის ეპიურის მოხაზულობას და ის უფრო სინამდვილეს დაუახლოვ დება, თუ დაყოფილი უბნების რიცხვს უსასრულოდ გავზრდით. ასეთ შემთხვევისათვის ცხადია, რომ თოკის მრავალკუთხედს ექნება მრუდ



ნახ. 43.

მოხაზულობა, რომელიც სათანადო სიზუსტით მოგვცემს მღუნავი მომენ-ტის მოხაზულობას. მიღებულ მრუდს ეწოდება **თ ო კ ი ს მ რ უ დ ი**; ის მიიღება მიახლოებით აგებულ თოკის მრავალკუთხედში ჩახაზვით; მისი შეხების წერტილები მოთავსებული იქნებიან დანაწილებული უბნების საზღვრებზე, რომლითაც დაყოფილია მთლიანი დატვირთვა (ნახ. 43, *b*).

უბნებზე მოდებული ძალების მიხედვით განივი ძალის (Q) ეპიურას უნ-და ჰქონდეს საფეხურისებური მოხაზულობა, რაც შეუძლებელია მთლიანი დატვირთვისათვის (ნახ. 43, *c*). ეპიურის ნამდვილი მოხაზულობის მისა-ღებად საჭიროა უბნების გამყოფი ხაზების გაგრძელებების და შე-

საბამისი ჰორიზონტალური სწორების გადაკვეთის წერტილების შეერთება მდოვრული მრუდით (ნახ. 43, c).

ნებისმიერ წერტილში მღუნავი მომენტის და განივი ძალის სიდიდეების გამოსათვლელად, საჭიროა H საპოლუსო მანძილის, მასშტაბების და შესაბამისი ეპიურების ორდინატების გამოყენება.

§ 13. ფართის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა

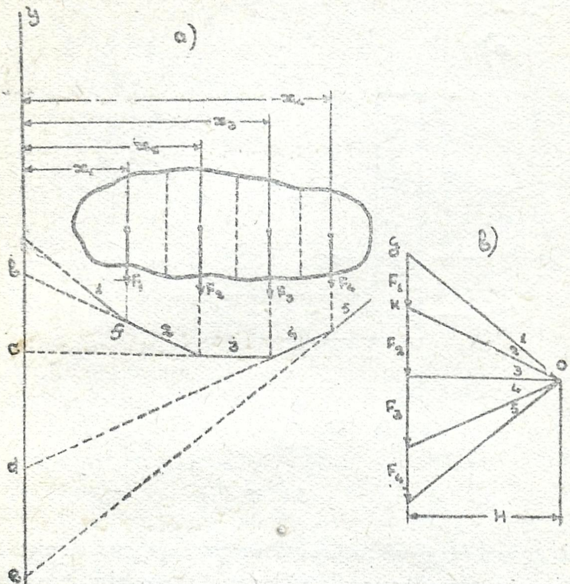
ამა თუ იმ ფართის სიმძიმის ცენტრის გრაფიკულად განსაზღვრა დამყარებულია პარალელურ ძალთა თვისებაზე, სახელდობრ: თუ *პარალელურ ძალთა სისტემას მოვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების მიმართ ერთი და იმავე კუთხით, მაშინ მათი ტოლქმედიც მობრუნდება მოდების წერტილის მიმართ იმავე მხარეს, იმავე კუთხით.* ტოლქმედის მოდების წერტილს ეწოდება პარალელურ ძალთა ცენტრი და სიმძიმის ძალების შემთხვევისათვის პარალელური ძალების ცენტრი წარმოადგენს *სიმძიმის ცენტრს.* თუ მოცემული იქნება რაიმე ფართი, რომლისთვისაც უნდა განისაზღვროს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, მაშინ მოცემულ ფართს დავყოფთ ნაწილებად ისე, რომ თითოეული ნაწილის ფართის გამოთვლა და სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა ადვილად შეიძლებოდეს. თითოეული ნაწილის სიმძიმის ძალად მივიღოთ მათი ფართები,

გრაფიკულად სიმძიმის ცენტრი მოიძებნება შემდეგნაირად: განვიხილავთ პარალელურ ძალთა სისტემას, რომელიც შემდგარია თითოეული ნაწილის ფართისაგან, მოდებული მათი სიმძიმის ცენტრებში. ავაგებთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედებს და განხილული წესების გამოყენებით განვსაზღვრავთ ტოლქმედის სიდიდეს, მიმართულებასა და მოდების წერტილის მდებარეობას. ამის შემდეგ ნებისმიერი კუთხით, ვთქვათ 90°-ით, მოვაბრუნებთ მთელ ძალთა სისტემას, რომლისთვისაც ახლად ვიპოვით, ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით, ტოლქმედის სიდიდეს, მიმართულებას და მოდების წერტილის მდებარეობას. ტოლქმედების გადაკვეთის წერტილი მოგვცემს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობას.

თუ მოცემულ ფართს, რომლისთვისაც უნდა განისაზღვროს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ აგება ადვილდება, რადგან სიმძიმის ცენტრი უნდა მდებარეობდეს აღნიშნულ ღერძზე. ამიტომ, ასეთ შემთხვევისათვის საჭიროა მხოლოდ ერთი ძალთა და თოკის მრავალკუთხედის აგება. ტოლქმედის გადაკვეთა სიმეტრიის ღერძთან მოგვცემს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობას. სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის უფრო მკაფიოდ განსაზღვრის მიზნით განვიხილოთ მაგალითები.

ნამრავლი. ფართის სტატიკური მომენტის გამოსათვლელად განვიხილოთ 46, a ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურა და გამოვითვალოთ მისი სტატიკური მომენტი yy ღერძის მიმართ.

ამისათვის მოცემული ფიგურა დავყოთ უბნებად, რომელთა ფართები აღვნიშნოთ F_1, F_2, F_3 და F_4 ასოებით. შესაბამის სიმძიმის ცენტრებში



ნახ. 46.

(ნებისმიერ მასშტაბში) მოვდოთ ისინი ვექტორების სახით და განვიხილოთ (ფართები) როგორც ძალები. ავაგოთ ძალთა (ვექტორთა) და თოკის მრავალკუთხედები (ნახ. 46, a და 46, b). თოკის მრავალკუთხედის გვერდები გავაგრძელოთ მოცემულ yy ღერძის გადაკვეთამდე და გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ a, b, c, d და e ასოებით. abf და gkO (ნახ. 46, a და 46, b) სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:

$$\frac{ab}{gk}=\frac{x_1}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

სადაც H არის საპოლუსო მანძილი, x_1 კი I უბნის ფართის ცენტრიდან yy ღერძამდე მანძილი. (1) ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$ab \cdot H = gk \cdot x_1$$

მაგრამ ჩვენი აღნიშვნების თანახმად $gk = F_1$, ამიტომ

$$F_1 \cdot x_1 = ab \cdot H$$

ასეთნაირადვე, შესაბამისი მსგავსი სამკუთხედების განხილვით, დავწერთ რომ:

$$F_2 \cdot x_2 = bc \cdot H,$$
$$F_3 \cdot x_3 = cd \cdot H,$$
$$F_4 \cdot x_4 = de \cdot H$$

მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების შეკრებით მივიღებთ:

$$F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot x_4 = (ab + bc + cd + de)H = ae \cdot H.$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარის თითოეული შესაკრები წარმოადგენს უბნების ფართების და მათი სიმძიმის ცენტრიდან yy ღერძამდე მანძილთა ნამრავლებს, რაც, განმარტების თანახმად, არის ფართის სტატიკური მომენტი, ამიტომ:

$$S_y = \Sigma F \cdot x = H \cdot ae$$

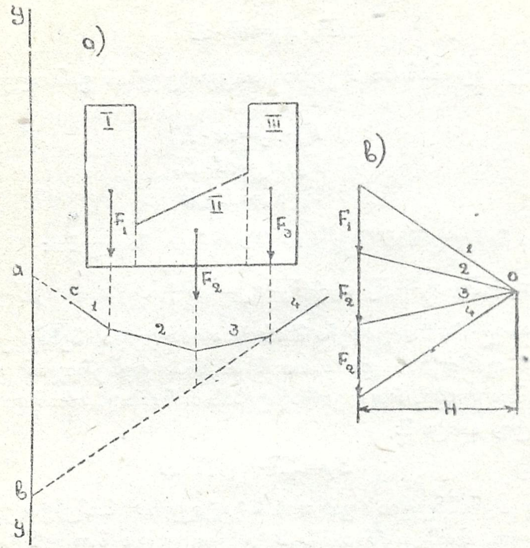
სადაც S_y-ით აღნიშნულია ფართის სტატიკური მომენტი yy ღერძის მიმართ. მივიღეთ, რომ ფართის სტატიკური მომენტი რაიმე yy ღერძის მიმართ უდრის საპოლუსო H მანძილისა და იმ მონაკვეთის ნამრავლს, რომელსაც თოკის მრავალკუთხედის კიდურა გვერდები მოჰკვეთს yy ღერძიდან. როგორც სხვა პარაგრაფებში, ისევე აქაც, საჭიროა მასშტაბების გათვალისწინება, სახელდობრ, თოკის მრავალკუთხედის კიდურა გვერდების მიერ yy ღერძზე მიღებული ae მონაკვეთის სიგრძის მასშტაბში და საპოლუსო H მანძილის F_1, F_2, F_3 და F_4 ფართების მასშტაბში გამოსახვა. ფართის სტატიკური მომენტის განმარტებიდან და ზემოგანხილული მასშტაბების გათვალისწინებით ჩანს, რომ სტატიკური მომენტის განზომილება სიგრძის განზომილების მესამე ხარისხით გამოიხატება.

თუ, მაგალითად, სიგრძის მასშტაბად მივიღეთ 1 სმ-ში 20 სმ, ხოლო ფართის მასშტაბად 1 სმ-ში 20 სმ², და თუ გაზომვით აღმოჩნდა $ae = 8$ სმ, ხოლო $H = 6$ სმ, მაშინ

$$S_y = ae \cdot H = 8 \times 20 \times 6 \times 20 = 19200 \text{ სმ}^3.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 47, a ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურისათვის ვიპოვოთ სტატიკური მომენტი yy ღერძის მიმართ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფიგურა დავყოთ I, II და III უბნებად, გამოვითვალოთ თითოეული უბნის ფართი, აღვნიშნოთ ისინი F_1, F_2 და F_3



ნახ. 47.

ასოებით, განვიხილოთ როგორც ძალები და ნებისმიერი მასშტაბის გათვალისწინებით ეს ძალები მოვდოთ სიმძიმის ცენტრებში (ნახ. 47, a). ავაგოთ ძალთა მრავალკუთხედი (შევარჩიოთ ნებისმიერი O პოლუსი და გავავლოთ 1, 2, 3 და 4 სხივები ნახ. 47, b). 47, a ნახაზზე ავიღოთ ნებისმიერი c წერტილი და ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი. გავაგრძელოთ თოკის მრავალკუთხედის 1 და მე-4 გვერდები yy ღერძის გადაკვეთამდე და გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ a და b ასოებით, რომელთა შორის მოთავსებული მონაკვეთი, გამრავლებული საპოლუსო H მანძილზე, მასშტაბების გათვალისწინებით, ზემოთქმულის მიხედვით გამოხატავს, მთელი ფიგურის, yy ღერძის მიმართ სტატიკური მომენტის სიდიდეს. ნათქვამის თანახმად

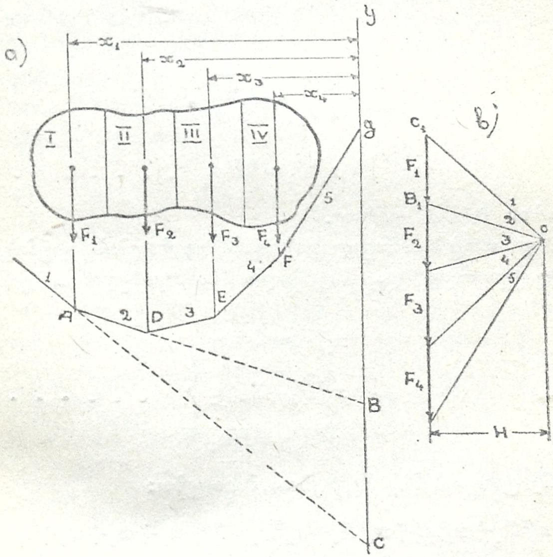
$$S_y = ab \cdot H,$$

სადაც ab უნდა გავზომოთ სიგრძის მასშტაბში, H კი ფართის მასშტაბ-

ში, რის შედეგადაც S_y განზომილებას მივიღებთ სმ³ ან მ³, იმისდა მიხედვით თუ სიგრძე ან ფართი რა ერთეულებშია გამოსახული.

§ 15. ფართის ინერციის მომენტი

ფიგურის ფართის ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ არის ელემენტარული ფართობებისა და მათი სიმძიმის ცენტრიდან განსახილველ ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავლთა ჯამი, აღებული ფიგურის მთელ ფართზე. როგორც განმარტებიდან ჩანს, ფართის ინერციის მომენტის განზომილება უნდა იყოს სიგრძის განზომილების მეოთხე ხარისხი. ფართის ინერციის მომენტის გამოსათვლელად განვიხილოთ 48, a ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურა და გამოვითვალოთ მისი ინერციის მომენტი yy ღერძის მიმართ.



ნახ. 48.

ამისათვის მოცემული ფიგურა yy ღერძის პარალელური ხაზებით დავყოთ ელემენტარული სისქის უბნებად (ჩვენს შემთხვევაში ოთხად). თითოეული უბნის ფართი აღვნიშნოთ F_1, F_2, F_3, F_4-თი და მათი სიდიდეები მოვდოთ უბნის სიმძიმის ცენტრებზე, რომელთა დაშორება yy ღერძი-

დან აღვნიშნოთ x_1, x_2, x_3 და x_4-ით. F_1, F_2, F_3 და F_4 ფართები, რომელთა გამომსახველი ვექტორები პარალელური იქნებიან yy ღერძის, განვიხილოთ, როგორც პარალელური ძალები და მათთვის ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები (ნახ. 48, b და 48, a). გავაგრძელოთ თოკის მრავალკუთხედის 1 და მე-2 გვერდები yy ღერძის გადაკვეთამდე და განვიხილოთ ABC და OB_1C_1 სამკუთხედები. აგების თანახმად, აღნიშნულ სამკუთხედებში $AC \parallel B_1O$, $AB \parallel C_1O$ და $BC \parallel B_1C_1$, მაშასადამე, განხილული სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ:

$$\frac{\text{ფართი } \triangle OB_1C_1}{\text{ფართი } \triangle ABC}=\frac{H^2}{x_1{}^2}$$

მაგრამ

$$\text{ფართი } \triangle OB_1C_1=\frac{HF_1}{2}$$

ამიტომ

$$\frac{HF_1}{2\omega_1}=\frac{H^2}{x_1{}^2},$$

საიდანაც

$$x_1{}^2F_1=2H\omega_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

სადაც ω_1 არის $\triangle ABC$ ფართი.

შესაბამისად თოკის მრავალკუთხედის გვერდების გაგრძელებებით yy ღერძის გადაკვეთამდე და სათანადო სამკუთხედების განხილვით მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_2{}^2F_2&=2H\omega_2\\ x_3{}^2F_3&=2H\omega_3\\ x_4{}^2F_4&=2H\omega_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(1) და მე-(2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$x_1{}^2F_1+x_2{}^2F_2+x_3{}^2F_3+x_4{}^2F_4=2H(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4).$$

აღვნიშნოთ $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=\Omega$. როგორც ნახაზიდან ჩანს, Ω ტოლი იქნება $ADEFgCA$ მრავალკუთხედის ფართისა. აღნიშვნის თანახმად გვექნება:

$$x_1{}^2F_1+x_2{}^2F_2+x_3{}^2F_3+x_4{}^2F_4=2H\Omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

მე-3 ტოლობის მარცხენა ნაწილის თითოეული წევრი წარმოადგენს ცალკეული უბნების ფართების ინერციის მომენტებს yy ღერძის მიმართ

ამიტომ მათი ჯამი იქნება მოცემული ფიგურის ინერციის მომენტი, მაშასადამე,

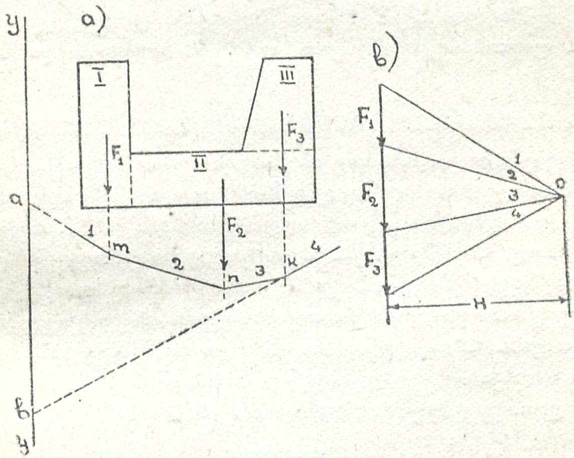
$$I_y = 2H\Omega,$$

სადაც I_y-ით აღნიშნულია ფართის ინერციის მომენტი yy ღერძის მიმართ.

მივიღეთ, რომ ინერციის მომენტი ნებისმიერი y ღერძის მიმართ უდრის გაორკეცებულ საპოლუსო მანძილისა და იმ ფართის ნამრავლს, რომელიც შედგენილია თოკის მრავალკუთხედის გვერდებით, კიდურა გვერდების გაგრძელებებით და მათი, yy ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს შორის მანძილით.

უნდა გვახსოვდეს, რომ საპოლუსო მანძილიც (H) წარმოადგენს ფართს (ძალას) და უნდა გაიზომოს იმავე მასშტაბით, რაც F_1, F_2, F_3 და F_4 ფართები (ძალები), ხოლო Ω-ც წარმოადგენს ფართს და ის უნდა გაიზომოს იმ მასშტაბით, რომლითაც ავაგეთ მოცემული ფიგურა, რის შედეგადაც მივიღებთ ფართის ინერციის მომენტის სიდიდეს და, მაშასადამე, მის განზომილებასაც.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. 49, a. ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურისათვის ვიპოვოთ ინერციის მომენტი yy ღერძის მიმართ.



ნახ. 49.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფიგურა დავყოთ I, II და III უბნებად. გამოვითვალოთ თითოეული უბნის ფართი, აღვნიშნოთ ისინი F_1, F_2 და F_3

ასოებით და მოვდოთ შესაბამისად მათ სიმძიმის ცენტრებში. ფართების გამომსახველი F_1, F_2 და F_3 სიდიდეები განვიხილოთ როგორც ძალები და ავაგოთ ძალთა მრავალკუთხედი, რისთვისაც შევარჩიოთ ნებისმიერი O პოლუსი, შევაერთოთ გადაზომილი F_1, F_2 და F_3 ძალების საწყისი და ბოლო წერტილები მასთან (ნახ. 49, b) და სასურველ წერტილიდან ავაგოთ თოკის მრავალკუთხედი (ნახ. 49, a). გავაგრძელოთ თოკის მრავალკუთხედის პირველი და მეოთხე გვერდები (კიდურა გვერდები) yy ღერძის გადაკვეთამდე და გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ a და b ასოებით. ჩვენი დამტკიცების თანახმად, მოცემული ფიგურის ფართის ინერციის მომენტი yy ღერძის მიმართ სათანადო მასშტაბთა გათვალისწინებით იქნება:

$$I_y = \text{ფართი } abknma \times 2H,$$

სადაც $abknma$ მრავალკუთხედის ფართი უნდა გავზომოთ იმ მასშტაბით, რა მასშტაბითაც აგებულია მოცემული ფიგურა, რომლის განზომილება იქნება სიგრძის განზომილების მეორე ხარისხი, ხოლო საპოლუსო მანძილი იმ მასშტაბში, რა მასშტაბითაც გადავზომეთ უბნების ფართის გამომხატველი F_1, F_2 და F_3 სიდიდეები, რომლის განზომილება სიგრძის განზომილების მეორე ხარისხის ტოლია. მაშასადამე, ასეთი გამოთვლებით და მასშტაბების გათვალისწინებით მივიღებთ (გრაფიკულად) მოცემული ფიგურის ფართისათვის ინერციის მომენტის სიდიდეს და მის განზომილებას.

§ 16. ფერმის ღეროებში ძალვების განსაზღვრის გრაფიკული ხერხები

როგორც ცნობილია, ამა თუ იმ ნაშენის უძრაობისათვის საჭიროა მისი მინიმუმ სამი ღეროთი დამაგრება მაინც და იმ შემთხვევაში, როდესაც საყრდენი ღეროების რიცხვი არ აღემატება სამს, მაშინ, საყრდენი დამაგრებების მხრივ, საქმე გვექნება სტატიკურად რკვევად სისტემასთან, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი სტატიკურად ურკვევადთან.

აგრეთვე ცნობილია, რომ ესა თუ ის ფერმა სტატიკურად რკვევადია თავისი შიგა ღეროების მიმართ იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ღეროების რიცხვი M, რომლებიდანაც შემდგარია ფერმა, ეტოლება კვანძების (N) გაორკეცებულ რიცხვისა და 3-ის სხვაობას, ე. ი.

$$M = 2N - 3$$

და იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$M > 2N - 3,$$

მაშინ ფერმა სტატიკურად ურკვევადია.

ზემოთქმულის მიხედვით ადვილია იმის ჩვენება, რომ ფერმა სტატიკურად რკვევადი იქნება მაშინაც, როცა

$$M_0=2N,$$

სადაც M_0 არის ფერმის ყველა შიგა ღეროსა და საყრდენი ღეროების რიცხვთა ჯამი, N კი კვანძების რიცხვი. ამას გარდა, ფერმას საჭიროა ქონდეს ისეთი კონსტრუქცია, რომ მისი ღეროები ან იჭიმებოდნენ, ანდა იკუმშებოდნენ. ამისათვის საჭიროა შემდეგი დამატებითი პირობების დაცვა:

ა) დატვირთვის მოდება მხოლოდ კვანძებზე,

ბ) ღეროების ერთმანეთთან დაკავშირება სახსრებით,

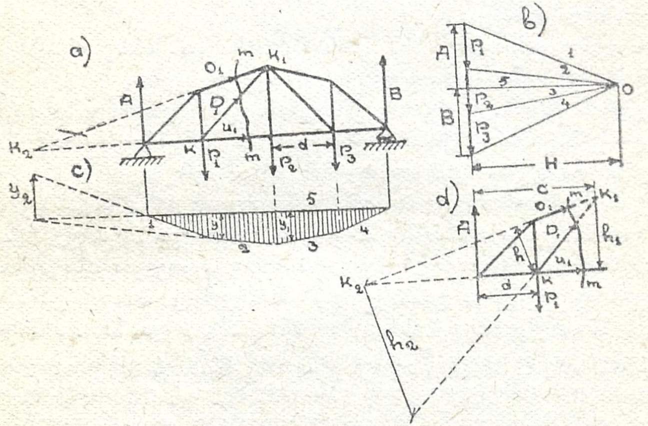
გ) ღეროების ერთმანეთთან დაკავშირება მხოლოდ ბოლოებით და მათი სწორხაზოვანი სახე.

ფერმის ღეროებში ძალების განსაზღვრისათვის არსებობს სხვადასხვა ხერხი, რომელთაგანაც განვიხილავთ გრაფიკულ ხერხს.

1. რიტერის ხერხი. ეს ხერხი უმთავრესად იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც საჭიროა ფერმის ერთ-ერთ რომელიმე ღეროში ძალვის განსაზღვრა. რიტერის ხერხით ფერმის ნებისმიერ ღეროში (ვთქვათ, O_1 ღეროში) ძალვის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ 50, a ნახაზზე წარმოდგენილი ფერმა ქვედა კვანძებზე მოქმედი P_1, P_2 და P_3 ძალებით.

ძალვის სიდიდის განსაზღვრამდე, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა A და B საყრდენი რეაქციების განსაზღვრა, რომლებიც მოიძებნებიან ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით (ნახ. 50, b და 50, c). ნაპოვნი A და B რეაქციები მოვდოთ შესაბამისად საყრდენებზე (ნახ. 50, a) და გავატაროთ ისეთი mm კვეთი, რომ განსახილველ O_1 ღეროს გარდა გაკვეთოს ორი, ამ შემთხვევაში D_1 და U_1 ღეროები, რის შედეგადაც განსახილველი ფერმა გაიყოფა მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებად. უკუვაგდოთ მარჯვენა (ან მარცხენა) ნაწილი და განვიხილოთ მარცხენა (ან მარჯვენა) ნაწილის წონასწორობა (ნახ. 50, d). როგორც ნახაზიდან ჩანს, ამ ნაწილზე მოქმედებს საყრდენი A რეაქცია, P_1 ძალა, O_1, D_1 და U_1 ძალვები, რომლებიც მიმართულია გადაკვეთილი ღეროების ღერძების გასწვრივ და, რომლებიც ცვლიან უკუგდებულ მარჯვენა ნაწილის მოქმედებას. O_1, D_1 და U_1 ძალვების მიმართულება მივიღოთ ისეთი, თითქოს მათი შესაბამისი ღეროები მუშაობდეს გაჭიმვაზე. იმ შემთხვევაში, თუ გაანგარიშების შედეგად მივიღებთ უარყოფით ნიშანს O_1, D_1 და U_1 ძალვებისათვის, ან რომელიმე მათგანისათვის, მაშინ ჩვენ მიერ აღებული მიმართულება უნდა შევცვალოთ მოპირდაპირეზე, რაც იმას მოასწავებს, რომ ღეროები კი არ იჭიმებიან, არამედ იკუმშებიან. იმისათვის, რომ გავიგოთ

ძალვა O_1, ან D_1 და U_1 ღეროებში, საჭიროა ისეთი განტოლებების შედგენა, რომ თითოეულ მათგანში შედიოდეს მხოლოდ ერთი უცნობი. ასეთი განტოლების შედგენის წესი მოგვცა რ ი ტ ე რ მ ა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ, მაგალითად, საჭიროა O_1 ღეროში ძალვის სიდიდის განსაზღვრა, მაშინ ჩვენ ავიღებთ ისეთ წერტილს, რომლის მიმართაც შედგენილი (განხილულ მარცხენა მხარეზე მოქმედი ძალების და უცნობ ძალვათა მომენტებისაგან შემდგარი) წონასწორობის განტოლება შეიცავდეს მხოლოდ ერთ უცნობს. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ასეთი წერტილი იქნება ორი დანარჩენი D_1 და U_1 ღეროების გადაკვეთის K წერტილი



ნახ. 50.

(ნახ. 50, *a*), ე. წ. რ ი ტ ე რ ი ს წ ე რ ტ ი ლ ა დ წოდებული. K წერტილის მიმართ წონასწორობის განტოლების დაწერით მივიღებთ:

$$Ad+O_1\times h=O,$$

საიდანაც

$$O_1=-\frac{Ad}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

მინუსი ნიშანი იმის მაჩვენებელია, რომ O_1 ღეროში ძალვა იქნება მკუმშავი, რის გამოც, ჩვენ მიერ დაშვებული მიმართულება უნდა შეიცვალოს მოპირდაპირეზე.

U_1 ღეროში ძალვის გასაგებად, უნდა დავწეროთ ფერმის მარცხენა (ან მარჯვენა) მხარეზე მოქმედი ყველა ძალის მომენტები ორი დანარჩენი O_1 და D_1 ღეროების გადაკვეთის K_1 წერტილის მიმართ. აღნიშნული წერტილის მიმართ, წონასწორობის განტოლება ასე დაიწერება:

$$A \cdot c - P_1(c-d) - U_1 \cdot h_1 = O,$$

საიდანაც

$$U_1 = \frac{A \cdot c - P_1(c-d)}{h_1} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

ასევე შეგვიძლია დავწეროთ წონასწორობის განტოლება D_1 ღეროში ძალვის განსაზღვრისათვის K_2 წერტილის მიმართ. როგორც 1 და მე-2 ტოლობებიდან ჩანს, მათი მრიცხველები Ad და $Ac-P_1(c-d)$ წარმოადგენენ აბსოლუტური სიდიდით K და K_1 წერტილების მარცხნივ მოთავსებულ ძალთა მომენტებს ამავე წერტილების მიმართ, ამიტომ 1 და მე-2 ტოლობები შეიძლება ასე დავწეროთ:

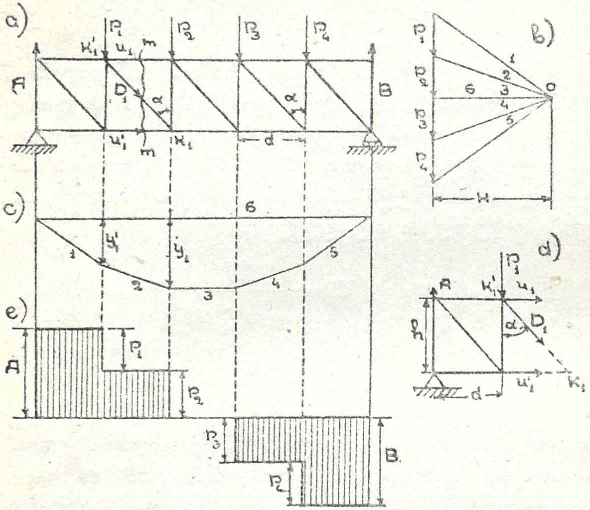
$$O_1 = -\frac{M_k}{h}$$

$$U_1 = \frac{M_{k_1}}{h_1}$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, აღნიშნული მომენტები განისაზღვრებიან ძალიან მარტივად თოკის მრავალკუთხედიდან (ნახ. 50, c). მართლაც, თუ თოკის მრავალკუთხედის y და y_1 ორდინატებს გავამრავლებთ საპოლუსო H მანძილზე (როგორც ეს განხილული გვქონდა § 12-ში) მივიღებთ K და K_1 წერტილების მიმართ ძალთა მომენტების სიდიდეს. მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ასეთი გამოთვლების დროს საჭიროა მასშტაბების გათვალისწინება, სახელდობრ, y და y_1 ორდინატები უნდა გაიზომოს სიგრძის მასშტაბში, რომლითაც ავაგეთ ფერმა, ხოლო საპოლუსო H მანძილი ძალთა მასშტაბში. ასეთი გამოთვლები მეტად ამარტივებს ფერმის ნებისმიერ ღეროში ძალვათა სიდიდეების გამოთვლას. თუ, მაგალითად, ასეთი წესით გვინდა გამოვითვალოთ D_1 ღეროში ძალვის სიდიდე, მაშინ შეგვიძლია იგივე mm კვეთის გამოყენებით განვსაზღვროთ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ორი დანარჩენი ღეროს გადაკვეთის წერტილის მდებარეობა (K_2), რომლის მიმართ მარცხენა (ან მარჯვენა) ნაწილზე მოდებული ძალების მომენტი განისაზღვრება y_2 სიდიდით და H პოლუსის გათვალისწინებით. h_2 მხარს კი ვიპოვით გრაფიკულად.

განვიხილოთ პარალელურ სარტყლებიანი ფერმა. ზედა სარტყელზე მოქმედი P_1, P_2, P_3 და P_4 ძალებით. განვსაზღვროთ ძალვები ნებისმიერ ღეროებში (ნახ. 51, *a*). ამისათვის საჭიროა წინასწარ ვიპოვოთ A და B საყრდენი რეაქციები, რისთვისაც უნდა ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები (ნახ. 51, *b* და ნახ. 51, *c*).

U_1 და U'_1 ღეროებში (სარტყელებში) ძალვების გამოთვლა წარმოებს ისე, როგორც ზემოგანხილულ შემთხვევაში, სახელდობრ, ვიპოვით



ნახ. 51.

რიტერის K_1 და K'_1 წერტილებს, რომლის მიმართაც შევადგენთ ფერმის განსახილველ, ჩვენ შემთხვევაში, მარცხენა ნაწილზე მოქმედი ძალების წონასწორობის განტოლებებს, რომლებიდანაც ამოიხსნება U_1 და U'_1 ძალვათა სიდიდეები, ან ძალვების გამოსათვლელი ტოლობების მრიცხველში შემავალ სიდიდეებს განვსაზღვრავთ რიტერის K_1 და K'_1 წერტილების პირდაპირ მდებარე თოკის მრავალკუთხედის შესაბამისი y_1 და y'_1 ორდინატებისა და საპოლუსო H მანძილზე ნამრავლით, მასშტაბების გათვალისწინებით. როგორც თოკის მრავალკუთხედიდან ჩანს, ძალვები სარტყელების ღეროებში იზრდებიან საყრდენებიდან შუისაკენ y ორდინატების ზრდასთან ერთად.

D_1 ღეროში (ირიბანში) ძალვის გამოსათვლელად კი ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ რიტერის ხერხს, რადგან mm კვეთში მოხვედრილი ორი U_1 და U'_1 ღეროების გაგრძელებანი ერთმანეთს არ გადაკვეთენ სასრულო მანძილზე, რის გამოც ვერ მივიღებთ რიტერის წერტილსაც. ამიტომ, აღნიშნულ ღეროში ძალვის განსაზღვრისათვის დავწეროთ ფერმის mm კვეთის მარცხნივ მდებარე ყველა ძალის გეგმილები ვერტიკალურ ღერძზე და მათი ჯამი გავუტოლოთ ნულს, ე. ი. გამოვიყენოთ სტატიკის $\Sigma y=O$ განტოლება. 51, *d* ნახაზის მიხედვით დავწეროთ:

$$A-P_1-D_1\cos\alpha=O,$$

საიდანაც

$$D_1=\frac{A-P_1}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

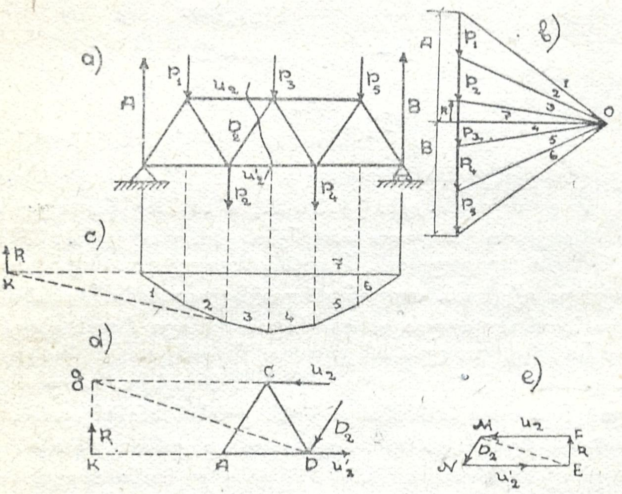
უკანასკნელი ტოლობის მრიცხველი $A-P_1$ წარმოადგენს mm კვეთისათვის განივ ძალას. (იხ. § 12). 51, *a* ნახაზზე წარმოდგენილ ფერმაში თუ შევცვლით მხოლოდ ირიბნების მიმართულებას, მაშინ მათში ძალვათა ნიშნები შეიცვლებიან, მაგრამ აბსოლუტური სიდიდით კი ერთმანეთის ტოლი იქნებიან. როგორც 1 ფორმულიდან ჩანს, ირიბანში ძალვა პირდაპირი პროპორციულია განივი ძალის. განივი ძალის ეპიურა აგებულია 51, *e* ნახაზზე, რომლის მიხედვითაც შეგვიძლია ნებისმიერ ირიბანში ძალვის სიდიდის განსაზღვრა 1 ფორმულის მსგავსად, მხოლოდ წინასწარ მოცემული უნდა იყოს ირიბანის დახრის კუთხის მნიშვნელობა.

2. **კულმანის ხერხი.** ეს ხერხი უმთავრესად გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა ფერმის რომელიმე ღეროში ძალვის განსაზღვრა. აქაც, როგორც რიტერის ხერხში, საჭიროა ფერმა გავჭრათ რაიმე კვეთით ისეთ ადგილას, რომ გადაკვეთაში მოხვდეს ერთ წერტილში არათანამკვეთი მხოლოდ სამი ღერო. თუ ჩვენ უკუვაგდებთ ერთ-ერთ ნაწილს—მარცხენას ან მარჯვენას და რომელიმე მათგანზე მოქმედ ძალების ტოლქმედს დავშლით სამ მიმართულებაზე (იხ. § 11), მაშინ ღეროებში ძალვები განისაზღვრებიან სიდიდით და მიმართულებით წონასწორობის პირობიდან. ეს ხერხი პირველად წარმოდგენილი იყო კულმანის მიერ, ამიტომ მას კულმანის ხერხს უწოდებენ.

ვთქვათ, საჭიროა გავიგოთ ძალვები 52, *a* ნახაზზე წარმოდგენილი ფერმის U_2, D_2 და U'_2 ღეროებში, რომლის ზედა და ქვედა კვანძებზე მოქმედებენ P_1, P_2, P_3, P_4 და P_5 ძალები.

ამისათვის ავაგოთ ძალთა და თოკის მრავალკუთხედები, რომლებიდანაც განისაზღვრებიან A და B რეაქციები (ნახ. 52, *b* და 52, *c*). გავიყვანოთ mm კვეთი, რომელიც გაკვეთს U_2, D_2 და U'_2 ღეროებს, რომლებიც ერთ წერტილში არ იკვეთებიან. განვიხილოთ მარცხენა მხარის წონასწორობა.

თოკის მრავალკუთხედის ჩამკეტის (მე-7 გვერდი) და მე-3 გვერდის გაგრძელებათა გადაკვეთა, როგორც ვიცით, მოგვცემს R ტოლქმედის მოდების k წერტილის მდებარეობას (ნახ. 52, c). მისი სიდიდე განისაზღვრება ძალთა მრავალკუთხედიდან (ნახ. 52 b). U_2, D_2 და U'_2 ღეროებში ძალების მოსაძებნად მიღებული R ტოლქმედი დავშალოთ სამ მიმართულებაზე გაკვეთილი ღეროების ღერძების შესაბამისად. ამისათვის გავაგრძელოთ U_2 ღერო R გადაკვეთამდე g წერტილში (ნახ. 52, d) და შევაერთოთ



ნახ. 52.

ის D წერტილთან (U_2' და D_2 ღეროების გადაკვეთის წერტილი). U_2 და gD მიმართულებების გათვალისწინებით ავაგოთ EFM ძალთა სამკუთხედი (ნახ. 52, e), საიდანაც განისაზღვრება U_2 ღეროში ძალვის სიდიდე და U_2' და D_2 ძალვების ტოლქმედი ME, რომლის დაშლით U_2' და D_2 ღეროების მიმართულებებზე მივიღებთ ძალვათა სიდიდეებს, რომლებიც გამოიხატებიან MN და NE მონაკვეთებით. წონასწორობის პირობის თანახმად საჭიროა FM, MN და NE მონაკვეთებს ჰქონდეს EF მონაკვეთის ან, რაც იგივეა, R მიმართულება, ე. ი. $EFMNE$ ოთხკუთხედი ჩაკეტილი იყოს, რომლის მიხედვითაც განისაზღვრება ღეროებში ძალვათა მიმართულებანი (ნახ. 52, c). მაგალითად, U_2 და D_2 ღეროში ძალვები მიიმართებიან კვანძებისაკენ, ამიტომ იქნებიან მკუმშავი, ხოლო

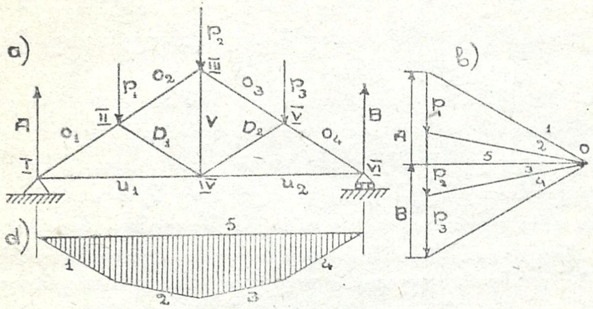
U_2' ღეროში ძალვა გამოდის კვანძიდან, ამიტომ ის იქნება გამჭიმავი. მათ სიდიდეთა მისაღებად კი უნდა გამოვიყენოთ ძალთა მასშტაბი.

3. მაკსველ-კრემონას დიაგრამა. ანალიზურად ფერმის ღეროებში ძალვების სიდიდეთა განსაზღვრისათვის სხვა ამოხსნებთან ერთად არსებობს კვანძების ამოჭრის ხერხიც. ცნობილია რომ, კვანძებზე მოდებული გარე და შიგა ძალები უნდა იმყოფებოდნენ წონასწორობაში, სწორედ ამ პირობიდან განისაზღვრებიან ღეროებში ძალვები, თანმიმდევრულად კვანძების ამოჭრით, მასზე მოქმედი ძალების დაგეგმილებით და წონასწორობის პირობების გათვალისწინებით.

ადვილია იმის წარმოდგენა, რომ ასეთი ხერხით ძალვების განსაზღვრა უნდა დავიწყოთ იმ კვანძის ამოჭრით, რომელშიაც შედის ორი ღერო (მაგალითად, საყრდენებთან) უცნობი ძალვებით და შემდეგ განვიხილოთ მიმდევრობით ის კვანძები, რომლებშიაც შევა არაუმეტეს უცნობ ძალვებიანი ორი ღერო. ადვილია იმის წარმოდგენაც, რომ მიმდევრობით კვანძების ამოკვეთით მასში შევა (განმეორდება, შეიძლება რამდენჯერმე) ის ღეროები, რომლის ძალვათა სიდიდეები წინა კვანძის განხილვის დროს განვსაზღვრეთ. ამიტომ ასეთი ხერხით სარგებლობა მოითხოვს დიდ დროს და მრავალ გამოთვლას. კვანძების ამოკვეთის ხერხი შეიძლება შეიცვალოს გრაფიკული ხერხით, რომელიც დამყარებული იქნება წონასწორობის პირობაზე, რაც გრაფიკულად ნიშნავს იმას, რომ კვანძებზე მოდებულმა ძალებმა უნდა ჩაკეტონ ძალთა მრავალკუთხედი (კერძოდ სამკუთხედი). ძალთა მრავალკუთხედის აგება შეიძლება ჩავატაროთ იმ შემთხვევაში, თუ კვანძზე მოდებული უცნობი ძალები (ძალვები) არ იქნება ორზე მეტი. ამ შემთხვევაში კვანძზე მოდებული ცნობილი ძალა, უნდა დაიშალოს ორ ცნობილ მიმართულებაზე, რომელიც განხილული გვქონდა § 2-ში. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ მივაღწევთ იმას, რომ ნახაზზე, რომლიდანაც განისაზღვრება ღეროებში ძალვების სიდიდეები, ძალვების გამომსახველი მონაკვეთები არ განმეორდებიან, რის გამოც ფერმის ღეროებში მარტივად და ნაკლები დროის დახარჯვით განისაზღვრებიან ძალვები. ასეთ ნახაზს, რომელიც შედგენილია ზემოთქმულის მიხედვით, მ ა კ ს ვ ე ლ - კ რ ე მ ო ნ ა ს დ ი ა გ ր ა მ ა ეწოდება.

განვიხილოთ 53, *a* ნახაზზე წარმოდგენილი ფერმა, რომელზედაც მოქმედებს P_1, P_2, P_3 ძალები. საჭიროა ფერმის ღეროებში ძალვების სიდიდეთა განსაზღვრა. ღეროებში ძალვების სიდიდეთა განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ მაკსველ-კრემონას დიაგრამის აგებით. დიაგრამის ასაგებად კი საჭიროა წინასწარ რეაქციების განსაზღვრა, რომლებსაც ვიპოვით ძალთა და თოკის მრავალკუთხედების აგებით (53, *b* და 53, *d*). ფერმის ღეროებში ძალვების სიდიდეთა მნიშვნელობები აღვნიშნოთ O_1, O_2,

O_3, O_4, D_1, V, D_2, U_1 და U_2 ასოებით (ნახ. 53, a), ხოლო კვანძები I, II, III, IV, V და VI რიცხვებით. მაქსველ-კრემონას დიაგრამის მარტივად აგების მიზნით, ორ მიმდევნო ძალასა და შესაბამის ფერმის ღეროს შორის არეები აღვნიშნოთ a, b, c, d და e ასოებით, ხოლო ფერმის ღეროებს შორის უბნები 1, 2, 3 და 4 რიცხვებით (ნახ. 54, a, აღნიშვნები ნებისმიერია). თითოეული კვანძის განხილვის დროს მასში შემავალი ღე-



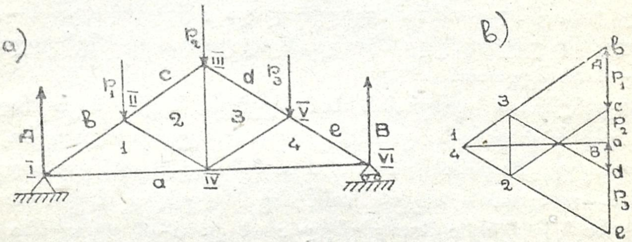
ნახ. 53.

როები დავალაგოთ ისე, როგორსაც მივიღებთ კვანძზე შემოვლისას საათის ისრის მიმართულებით. 54, a ნახაზზე წარმოდგენილ ფერმის ღეროებს წავიკითხავთ ასე: b—1, 1—a, c—2, 2—1, d—3 და ა. შ., რომლებიც შეესაბამებიან 53, a ნახაზზე წარმოდგენილ O_1, U_1, O_2, D_1, O_3 და ა. შ. ძალების შესაბამის გამომხატველ ღეროებს.

მაქსველ-კრემონას დიაგრამის აგებისათვის საჭიროა წინასწარ ძალთა მრავალკუთხედის აგება სათანადო მასშტაბის გათვალისწინებით. ამისათვის ნებისმიერ ვერტიკალურ ხაზზე (რადგან ვერტიკალური დატვირთვებია) თანმიმდევრობით გადავზომავთ მოცემულ ძალებს და რეაქციის ძალებს შესაბამისი ასოების აღნიშვნით საათის ისრის მიმართულებით. მაგალითად, b—c გამოხატავს P_1 ძალას, c—d კი P_2 და ა. შ. a—b, A რეაქციას.

დიაგრამის აგება დავიწყოთ I კვანძიდან. მასში თავს იყრის A ცნობილი რეაქცია და b—1, 1—a უცნობ ძალვებიანი ღეროები (ნახ. 54). A რეაქცია ძალთა მრავალკუთხედზე გამოიხატება ab მონაკვეთით (საათის ისრის მიმართულება), ხოლო უცნობ ღეროებში ძალვები b—1 და 1—a ძალთა $ba1$ სამკუთხედის გვერდებით, რომელსაც მივიღებთ A რეაქციის დაშლით b—1 და 1—a ღეროების მიმართულებებზე. ამისათვის ძალთა მრავალკუთხედის b წერტილიდან გავიყვანთ b—1 ღეროს, ხოლო a წერტილიდან 1—a ღეროს პარალელურ სწორებს, რომელთა გა-

დაკვეთა მოგვცემს 1 წერტილს (ნახ. 54, b). წონასწორობისათვის, როგორც ვიცით, საჭიროა, რომ $ba1$ ძალთა სამკუთხედის გვერდები მიმართული იყოს ერთ მხარეს. ასე, მაგალითად, რადგან A რეაქცია მიმართულია a-დან b-კენ, ამიტომ b—1 და 1—a ღეროებში ძალვები მიმართული იქნებიან b-დან 1-კენ და 1-დან a-კენ (ნახ. 54, b). $ba1$ ძალთა სამკუთხედის და I კვანძის განხილვით შევნიშნეთ, რომ ძალვა b—1 ღეროში იწვევს შესაბამისი ღეროს შეკუმშვას, რადგან მისი მიმართულება არის კვანძისაკენ, ხოლო ძალვა 1—a ღეროში გაჭიმვას, რადგან ის მიმართულია კვანძიდან. მკუმშავი ძალვა აღვნიშნოთ (—), ხოლო გამჭიმავი (+). ჩვენს შემთხვევაში b—1 ღეროში ძალვა იქნება (—) ნიშნით, 1—a ღეროში კი (+) ნიშნით.



ნახ. 54.

II კვანძის განხილვით შევნიშნავთ, რომ მასში თავს იყრის I კვანძის წონასწორობის პირობიდან განსაზღვრული 1—b ძალვა, ცნობილი P_1 ძალა და უცნობი ორი c—2, 2—1 ძალვა. ამიტომ შეიძლება კრემონას ხერხის გამოყენება. ამისათვის ვუკვირდებით 54, b ნახაზს, რომელზედაც ვკითხულობთ ძალვათა სიდიდეების გამომხატველ 1—b, b—c მონაკვეთებს, რის შემდეგაც c წერტილიდან (P_1 ძალის ბოლოდან) ვავლებთ c—2 ღეროს პარალელურს, ხოლო 1 წერტილიდან 2—1 ღეროს პარალელურ სწორებს, რომელთა გადაკვეთის წერტილს აღვნიშნავთ 2-ით. მიღებული $bc21b$ მრავალკუთხედი წონასწორობის გამო ჩაკეტილი უნდა იყოს, საიდანაც განისაზღვრება c—2 და 2—1 ღეროებში ძალვათა მიმართულებანი. II კვანძის ღეროებში ძალვათა განსაზღვრის შემდეგ შეგვიძლია გადავიდეთ შემდეგი კვანძის განხილვაზე. მაგრამ უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ პირველად III და შემდეგ IV კვანძები, ან პირიქით, რადგან აღნიშნულ კვანძებში შედის ორი უცნობი ღერო. განვიხილოთ III კვანძი. როგორც 54, a ნახაზიდან ჩანს, მასში თავს იყრის ცნობილი P_2 ძალა და სამი ღერო, რომელთაგანაც ერთი მათგანი 2—c ცნობილია. d—3 და 3—2

ღეროებში ძალების მოსაძებნად, 54, b ნახაზზე აღნიშნული d წერტილიდან გავავლოთ d—3 ღეროს პარალელური სწორი, ხოლო მეორე წერტილიდან 3—2 ღეროს პარალელური, რომელთა გადაკვეთა მოგვცემს მე-3 წერტილს. მიმართულებები განისაზღვრებიან ძალთა მრავალკუთხედის ჩაკეტვის პირობიდან.

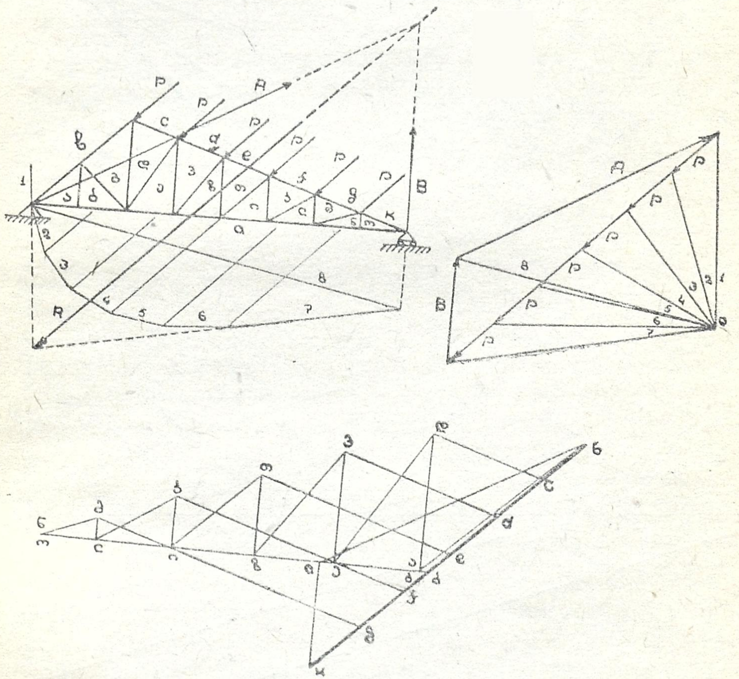
IV კვანძში უცნობი ძალებია 3—4 და 4—a ღეროებში, რომელთა განსასაზღვრავად 54, a ნახაზის მე-3 წერტილიდან გავავლოთ 3—4 ღეროს პარალელური სწორი, ხოლო a წერტილიდან 4—a ღეროს პარალელური, რომელთა გადაკვეთა მოგვცემს მე-4 წერტილს. მიმართულებანი განისაზღვრებიან წონასწორობის პირობებიდან.

V კვანძის განხილვით შევნიშნავთ, რომ ყველა ღეროში ძალები ცნობილია გარდა e—4 ღეროსა, რომელიც განისაზღვრება 54, a ნახაზის e წერტილიდან e—4 ღეროს პარალელურად და a წერტილიდან 4—a ღეროს პარალელურად გატარებული სწორების გადაკვეთის მე-4 წერტილით, ძალვა კი e—4 მონაკვეთით.

მაქსველ-კრემონას დიაგრამის საშუალებით, ჩვენ მიერ აღნიშნულ ფერმის ნებისმიერ ღეროში განისაზღვრებიან ძალვათა სიდიდეები, რომელთა მიმართულებები წონასწორობის პირობების გამოყენებით აიღება 54, a ნახაზიდან. დიაგრამის აგების სისწორე შეგვიძლია შევამოწმოთ, ჩვენ შემთხვევაში VI კვანძში მოთავსებულ e—4 და a—4 ღეროებში ხელმეორედ ძალების გამომსახველი მონაკვეთების აგებით, რის გამოც დიაგრამა ჩ ა კ ე ტ ი ლ ი უნდა აღმოჩნდეს.

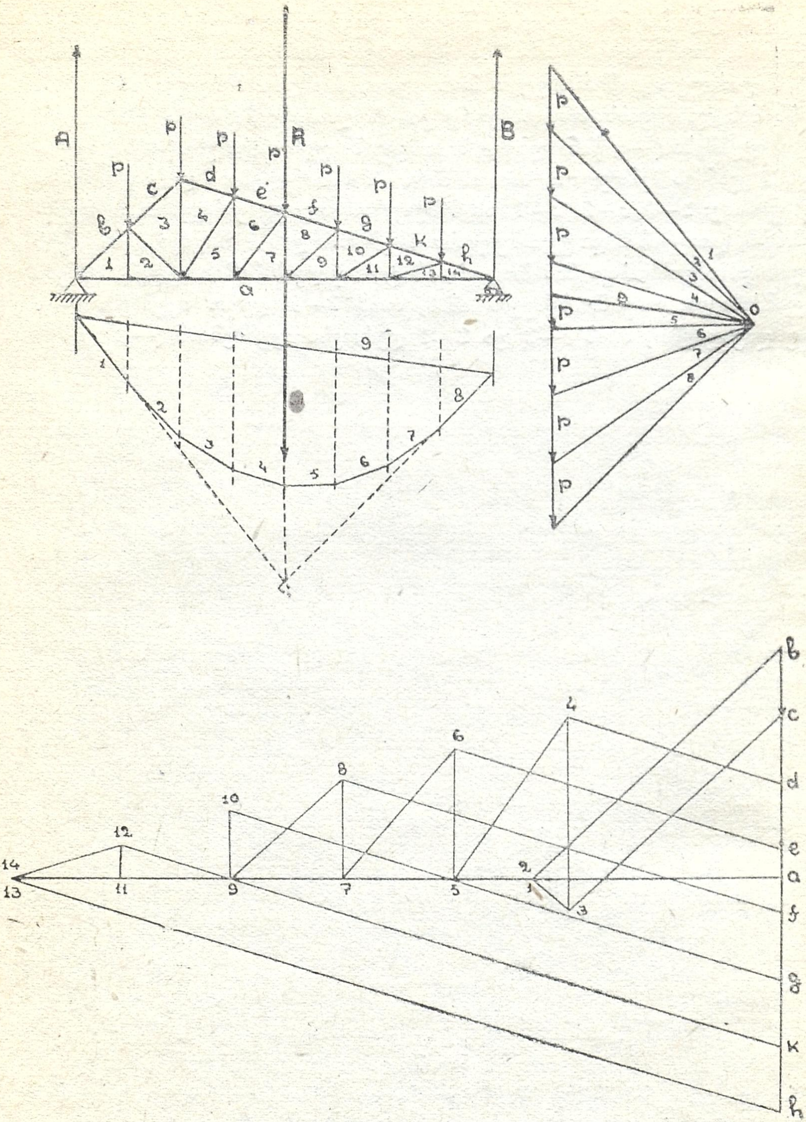
თუ ფერმა და დატვირთვა სიმეტრიულია, მაშინ დიაგრამაც სიმეტრიული იქნება და ამიტომ საჭირო არ არის ასეთი ფერმისათვის მთლიანად დიაგრამის აგება. დიაგრამას ავაგებთ მხოლოდ ფერმის ნახევრისათვის, რომელიც ანალოგიური იქნება მეორე ნახევრისათვის. უმჯობესია დიაგრამის აგებასთან ერთად ვაწარმოოთ ძალვების მიმართულებათა აღნიშვნაც. გავიხსენოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ძალთა მრავალკუთხედში აღნიშნული ძალვის მიმართულება შევა განსახილველ კვანძში, მაშინ ღერო იკუმშება (—), წინააღმდეგ შემთხვევაში, როდესაც კვანძიდან გამოვა ღერო იჭიმება (+). ფერმის ღეროში ძალვათა მიმართულების განსაზღვრა შეიძლება აგრეთვე, თუ ვისარგებლებთ ჩვენ მიერ შემოღებულ a, b, c, d და e ასოებით—არეების, ხოლო 1, 2, 3 და 4 რიცხვებით—უბნების აღნიშვნებით. ასეთი აღნიშვნებით ღეროებში ძალვების მიმართულებანი ასე განისაზღვრებიან: საათის ისრის მიმართულებით უვლით იმ კვანძს, რომელშიაც შედის ჩვენთვის საინტერესო ღერო და ვკითხულობთ მას. ასე, მაგალითად, b—1, 1—a, c—2, 2—1 და ა. შ., იგივე თანმიმდევრობით დიაგრა-

მაზე ვკითხულობთ მონაკვეთებს, წაკითხვასთან ერთად ვუცქერით ფერმის იმ ღეროს, რომელიც შეესაბამება წაკითხულ მონაკვეთს და იმ შემთხვევაში, თუ ძალვის გამომსახველი მონაკვეთი, რომლის პირველი ასო გვიჩვენებს მის დასაწყისს, ხოლო მეორე კი — ბოლოს, მიემართება კვანძისაკენ, ღერო იკუმშება (—), წინააღმდეგ შემთხვევაში ღერო იჭიმება (+). მაგალითად, II კვანძის შემოვლით, საათის ისრის მიმართულებით, ღეროებს წავიკითხავთ ასე: $1—b$, $c—2$, $2—1$. ამ მიმდევრობითვე ვუკვირდებით მაკსველ-კრემონას დიაგრამას და ვკითხულობთ $1—b$, რომლის 1 რიცხვი გვიჩვენებს ძალვის დასაწყისს, b კი მის ბოლოს, ამიტომ ძალვის მიმართულება იქნება II კვანძისაკენ, რაც მოასწავებს იმას, რომ $1—b$ ღერო იკუმშება (—). ასევე დავადგენთ, რომ $c—2$ და $2—1$ ღეროები იკუმშებიან (—).



ნახ. 55.

55-ე და 56-ე ნახაზებზე წარმოდგენილია ერთი და იგივე სისტემის ფერმა, რომლებზედაც მოქმედებენ პირველ შემთხვევაში დახრილი, ხოლო მეორე შემთხვევაში ვერტიკალური ძალები.



ნახ. 56.

მათთვის მაქსველ-კრემონას დიაგრამას ვაგებთ იმ მიმდევრობით, რომელიც ზემოთ გვქონდა განხილული. ღეროებში ნიშნებს კი ვარკვევთ ან ერთი, ან მეორე წესით. უმჯობესია ფერმის ღეროებში ძალვების სიდიდეები და მათი ნიშნები მოვიყვანოთ ცხრილში (იხ. ცხრილი № 1).

ცხრილი № 1.

ღეროს №№	ძალვების სიდიდე კგ-ში	
	დადებითი (+)	უარყოფითი (−)

წინასწარ ასეთი სახით ცხრილის შედგენა საშუალებას გვაძლევს ფერმის ნებისმიერ ღეროში გავიგოთ ძალვის სიდიდე და მისი მიმართულება, რათა ყოველთვის არ მივმართოთ დიაგრამას და იმ მასშტაბების გამოყენებას, რომლითაც აგებული იყო ძალთა მრავალკუთხედი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ნ. მუსხელიშვილი—თეორიული მექანიკის კურსი, სტატიკა. 1931 წ.
2. პროფ. კ. ს. ზავრიევი—ნაგებობათა წინაღობა, წიგნი I. 1948 წ.
3. Проф. К. С. Завриев—Сопротивление сооружений. 1939 г.
4. Проф. И. М. Рабинович—Строительная механика стержневых систем. 1946 г.
5. Проф. С. П. Тимощенко—Курс статики сооружений, часть I. 1938 г.
6. Проф. В. Л. Кирпичев—Основания графической статики. 1923 г.
7. А. И. Сегаль—Основы статики сооружений. 1935 г.
8. Проф. С. П. Тимощенко—Сопротивление материалов, том первый. 1945 г.
9. Проф. Н. М. Беляев—Сопротивление материалов. 1945 г.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

რედაქტორი: სსსრ მეცნ. აკადემიის წევრი კორესპონდენტი
პროფ. **გ. მ. მუხაძე**

კორექტორი **ნ. ლუდუშაური**
გამომშვები **შ. ხელაძე**

უე00008 შეკვ. № 2084 ტირაჟი 1.000
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 16/I-50 წ. ანაწყობის ზომა $6^1/_2 \times 9^1/_2$.
ქაღალდის ზომა 60×84. ნაბეჭდ ფორმათა რაოდენობა 4,5.
სააღრიცხვო-საგამომცემლო ფორმათა რაოდენობა 3,32.

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოსთან არსებული პოლიგრაფმრეწველობის, გამომცემლობებისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სამმართველოს სტამბა № 2. თბილისი, ფურცელაძის ქ. № 5.

ფასი 1 მ. 20 კ.

О. П. КВИРИКАДЗЕ

ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА

(На грузинском языке)

Гостехиздат Грузинской ССР
„ТЕХНИКА да ШРОМА“
Тбилиси — 1950